Georg Thierauf (Universität Essen, Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Bauwissenschaften, Projekt LE-KIB: Lernergänzung konstruktiver Ingenieurbau)

Einflußlinien für Kraft- und Weggrößen

Eine Einflußlinie (EL) für eine Kraft- oder Weggröße im Punkt i gibt an, welchen Wert die Größe in diesem Punkt annimmt, wenn eine Kraft F = 1 (bzw. ein Moment M = 1) an der Stelle x wirkt.

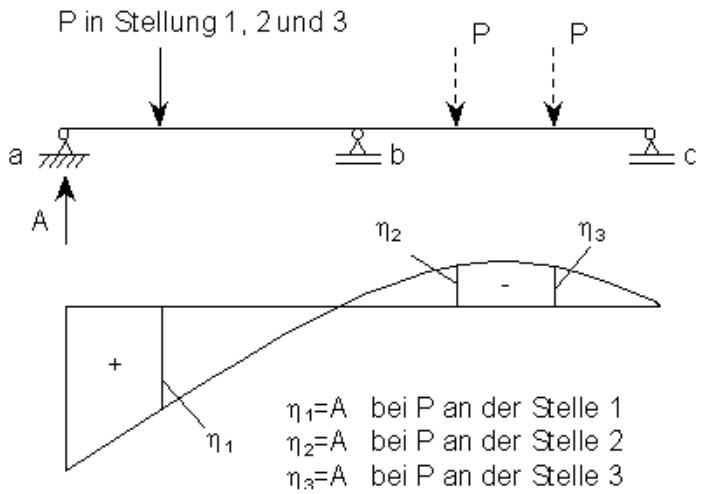


Abb. 1: Einflußlinie für die Auflagerkraft A infolge einer wandernden Last P = 1 auf einem Zweifeldträger.

Man unterscheidet Einflußlinien für Kraft- und für Weggrößen.

Hierbei sind

Kraftgrößen Auflagerreaktionen oder Schnittgrößen infolge der wandernden Einwirkung und

Weggrößen sind Verschiebungen oder Verdrehungen an einer bestimmten Stelle des Systems infolge der wandernden Einwirkung.

Grundlage für die Berechnung ist der **Satz von Maxwell**:

Die Verschiebung eines Punktes i infolge einer Last P = 1 im Punkt k ist gleich der Verschiebung des Punktes k infolge einer Last P = 1 im Punkt i.

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Für Einflußlinien für Weggrößen folgt hieraus:

Die Verschiebung an der Stelle i infolge einer Last an variabler Stelle x ist gleich der Verschiebung an variabler Stelle x infolge einer Last an der Stelle i.

Dies gilt für Verdrehungen analog und führt zum Ansatz zur Berechnung von Einflußlinien für Weggrößen:

Die Einflußlinie für eine Weggröße δ_i infolge einer wandernden Last P = 1 im Bereich x entspricht der Biegelinie im Bereich x infolge einer zur gesuchten Weggröße korrespondierenden Kraftgröße F = 1 an der Stelle i.

und analog:

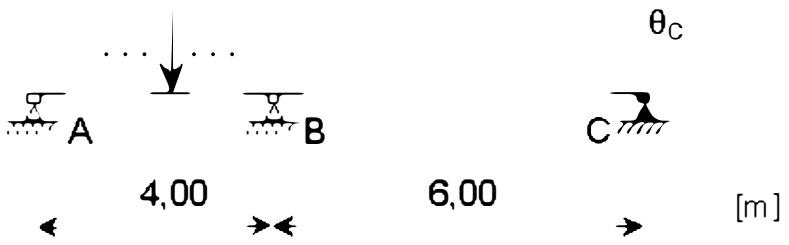
Die Einflußlinie für eine Kraftgröße F_i infolge einer wandernden Last P = 1 im Bereich x entspricht der Biegelinie im Bereich x infolge einer zur gesuchten Kraftgröße korrespondierenden virtuellen Weggröße δ_i = -1 an der Stelle i.

Zu einer Verschiebung **korrespondiert** eine gleichgerichtete Kraft und zu einer Verdrehung ein gleichgerichtetes Moment.

Berechnungsablauf: Einflußlinien für Weggrößen

1. Ansetzen einer Kraft P = 1 wenn die EL für eine Verschiebung gesucht ist und eines Momentes M = 1 für EL einer Verdrehung an der Stelle der gesuchten Weggröße.
2. Biegelinie berechnen

Beispiel 1:



gesucht: EL für EI · θ_C

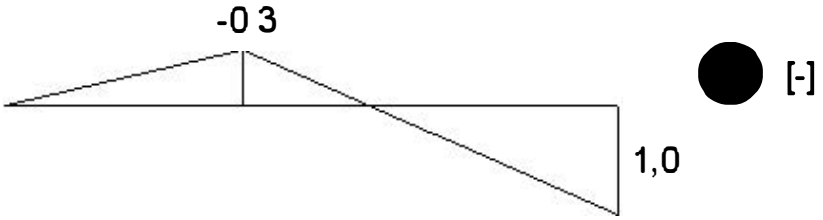
Berechnung:

Biegelinie infolge $M_C = 1$

aus Dreimomentengleichung:

$$M_B = -\frac{1}{2\cdot(l_1' + l_2')}\left[(R_1 + M_a)\,l_1' + (L_2 + M_C)\,l_2'\right]$$

$$= \frac{1}{2\,(4{,}0 + 6{,}0)}\,1{,}0\cdot 6{,}0 = -0{,}3$$

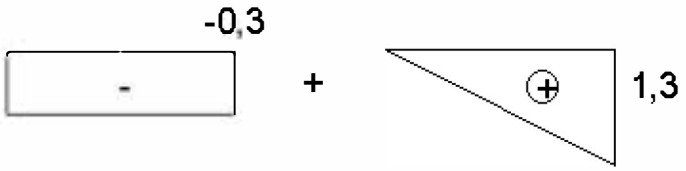


Berechnung der Biegelinie mit ω-Zahlen:

Feld 1, l_1 = 4,0 m

$$EI \cdot w_1(\xi_1) = -\frac{0{,}3 \cdot 4{,}0^2}{6}\,\omega_D(\xi_1) = -0{,}8 \cdot \omega_D(\xi_1)$$

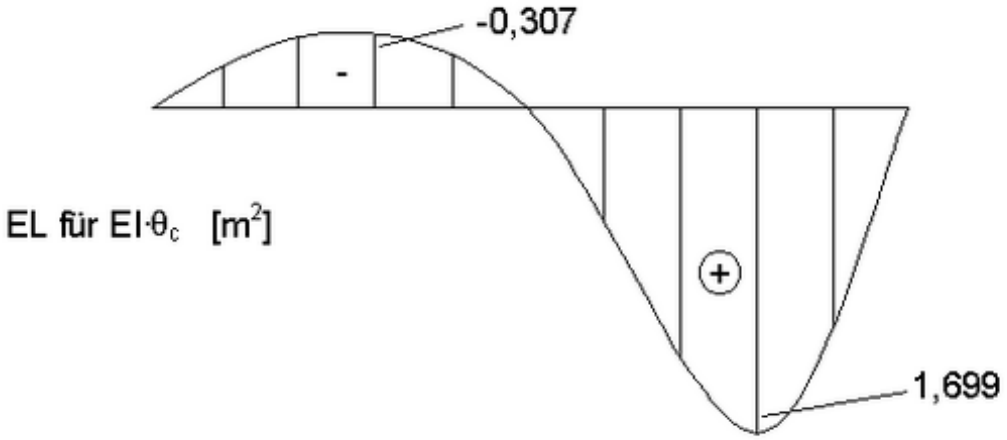
Feld 2, l_2 = 6,0 m



$$EI \cdot w_2(\xi_2) = -\frac{0{,}3 \cdot 6{,}0^2}{2} \cdot \omega_R(\xi_2) + \frac{1{,}3 \cdot 6{,}0^2}{6} \cdot \omega_B(\xi_2)$$

$$-5{,}4 \cdot \omega_R(\xi_2) + 7{,}8 \cdot \omega_B(\xi_2)$$

ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,0 1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ω_R						0,0	0,160	0,240	0,240	0,160	0,0
ω_B	0,0	0,192	0,336	0,384	0,288	0,0	0,192	0,336	0,384	0,288	0,0
EI·w(ξ)	0,0	-0,154	-0,269	-0,307	-0,230	0,0	0,634	1,325	1,699	1,382	0,0



Bei der Berechnung von EL für Kraftgrößen ist zwischen statisch bestimmten und unbestimmten Systemen zu unterscheiden.

Berechnungsablauf: Einflußlinien für Kraftgrößen statisch unbestimmter Systeme mit dem Kraftgrößenverfahren:

1. Lösen der Bindung an der Stelle der gesuchten Kraftgröße und Ansetzen einer entsprechenden Kraft $F_i = -1$ bzw. eines Momentes $M_i = -1$.
2. Berechnen der Biegelinie infolge der virtuellen Last.
3. Berechnen der Verformung δ_i an der Stelle i.
4. Skalieren der Biegelinie um den Faktor $1/\delta_i$ ergibt die gesuchte Einflußlinie.

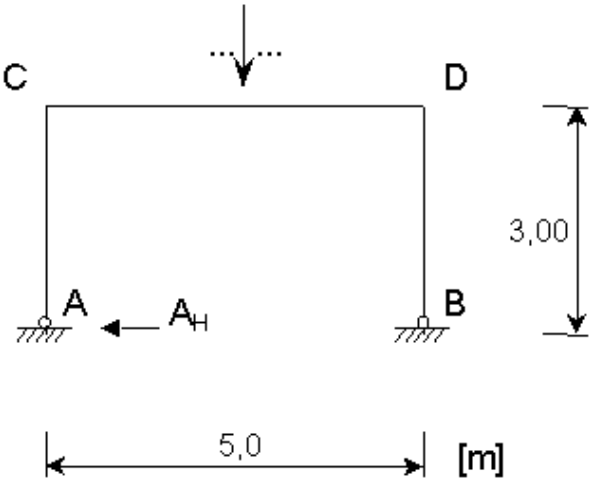
Die Redundanz des statischen Systems vermindert sich für die Berechnung von EL für Kraftgrößen um 1. Daraus ergibt sich für die Berechnung von EL statisch bestimmter Systeme, daß eine kinematische Kette entsteht.

Berechnungsablauf: Einflußlinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Systeme

1. Lösen der Bindung an der Stelle der gesuchten Kraftgröße und Ansetzen einer entsprechenden Verformung $\delta_i = -1$.
2. Ermitteln der kinematischen Kette aus den geometrischen Randbedingungen des Systems. (Alle geraden Stäbe bleiben gerade und behalten ihre ursprüngliche Länge bei.)

Anmerkung: Bei komplizierten Systemen kann die kinematisch Kette mit Hilfe von Polplänen konstruiert werden (siehe Literatur).
Häufig kann es auch hilfreich sein, die EL an einem einzelnen Punkt k zu bestimmen, indem die gesuchte Kraftgröße F_i infolge einer Last an der Stelle k berechnet wird.

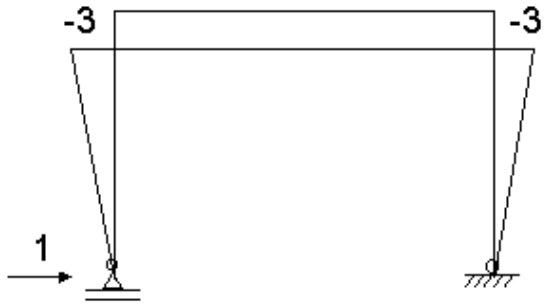
Beispiel 2:



$EA \rightarrow \infty$
EI = konst.

gesucht: EL für A_H

Momentenverlauf infolge $A_H = -1$



M [m]

$$\left.\begin{aligned} w(C) &= w(0) = 0 \\ w(D) &= w(\xi = 1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{wegen } EA \rightarrow \infty$$

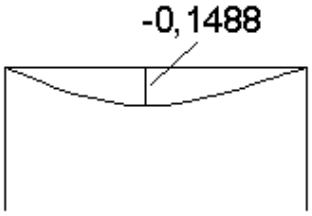
$$w(\xi) = -\frac{3 \cdot 5{,}0^2}{2 \cdot EI} \cdot w_R(\xi) = -37{,}5 \cdot \frac{1}{EI} \cdot w_R(\xi)$$

$$\delta_{A,horiz} = \left[2 \cdot \frac{3}{3} \cdot 3^2 + \frac{5}{1} \cdot 3^2\right] \cdot \frac{1}{EI} = \frac{63}{EI}$$

Biegelinie skalieren (·63/EI) :

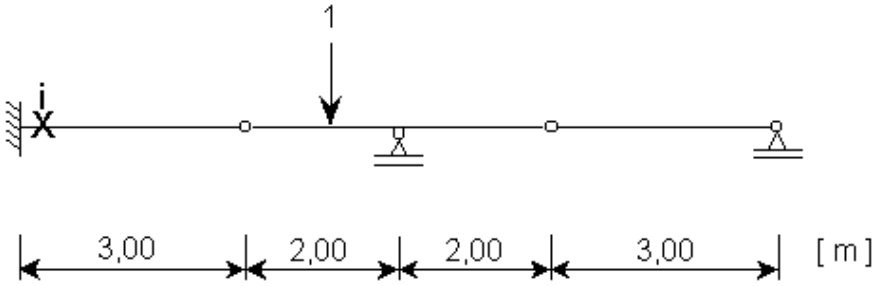
$$\bar{w}(\xi) = -\frac{37{,}5}{63} \cdot w_R(\xi) = -0{,}595 \cdot w_R(\xi) \quad [-]$$

z.B. für ξ=0,5 $\rightarrow$ w(ξ=0,5)=-0,595·0,25=-0,1488

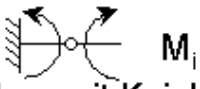


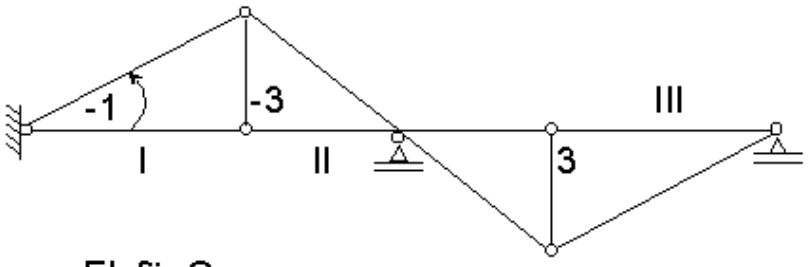
EL für A_H [-]

Beispiel 3: Träger, statisch bestimmt



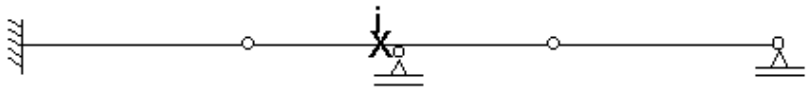
a) ges.: EL für M_i

1. Lösen der Bindung.: Gelenk in i  M_i
2. Virtuelle Verschiebungsfigur vorgeben mit Knick "1" im Einspannungspunkt



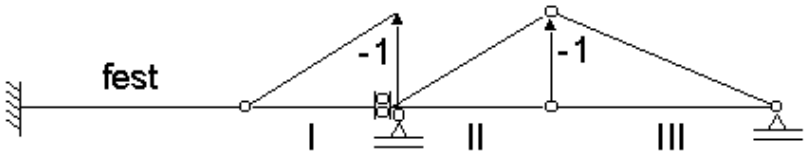
EL für M_i [m]

b) ges.. EL für Q_i



1. Lösen der Bindung: Querkraftgelenk in i, Q_i positiv ansetzen

2. Virtuelle Verschiebung mit Klaffung "-1" vorgeben



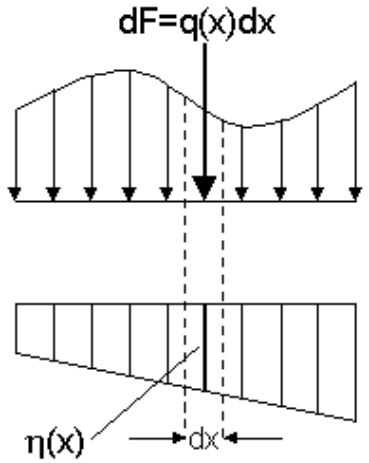
EL für Q_i [-]

Auswertung von Einflußlinien:

Voraussetzung: Es gilt das Superpositionsprinzip
Gesamtlösung = $\sum$ Einzellösungen

$$S(F=1) = 1 \cdot \eta = S(F) = F \cdot \eta$$ für Einzellasten

Auswertung für Streckenlasten: $dF = q(x)dx$

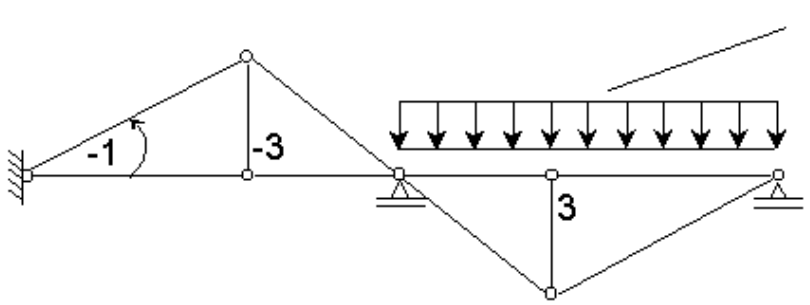


$$dS = dF \cdot \eta(x) = q(x) \cdot \eta(x)dx$$

$$\Rightarrow S = \int q(x) \cdot \eta(x)dx$$

Auswertungsgleichung: $$\boxed{S = \sum F_i \cdot \eta_i + \int q(x) \cdot \eta(x)dx}$$

Anwendung für Bsp. 3a: Auswertung für Streckenlast im rechten Feld:



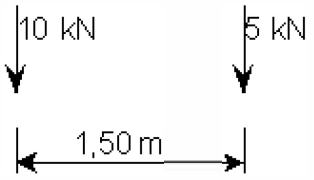
EL für M_i [m]

Unstetigkeit bei Integration beachten! (Knick im Gelenk)

$$M_i = \int q \cdot \eta(x)dx = q \cdot \int \eta(x)dx$$ für q=konst.

$$= 50 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2+3)}_{\text{Flächeninhalt der EL}} = 375\,kNm$$

Auswertung zu Beispiel 1 für Lastenzug:



Es muß die Stelle ξ_m berechnet werden, an der die Einzellasten die maximale Verdrehung θ_c erzeugen.

bezogener Abstand: $\xi_a = \frac{1,5}{6,0} = 0,25$

Feld 2:

$$EI \cdot \eta = -5,4\,\omega_R(\xi) + 7,8\,\omega_B(\xi)$$
$$EI \cdot \eta = -5,4(\xi - \xi^2) + 7,8(\xi - \xi^3)$$
$$EI \cdot \eta = 2.4\xi + 5.4\xi^2 - 7.8\xi^3$$

$$\left.\begin{aligned} &EI \cdot \theta_L(\xi) = 10 \cdot \eta(\xi) \\ &EI \cdot \theta_L(\xi) = 24.0\xi + 54\xi^2 - 78\xi^3 \\ &1.\ Abl.:\quad EI \cdot \theta_L'(\xi) = 24.0 + 108.0\xi - 234.0\xi^2 \end{aligned}\right\}\ \text{für linke Einzellast}$$

$$\left.\begin{aligned} &EI \cdot \theta_R(\xi) = 5 \cdot \eta(\xi + 0.25) \\ &\qquad = 12\xi + 3.000 + 27.0(\xi + .25)^2 - 39.0(\xi + .25)^3 \\ &1.\ Abl.:\quad EI \cdot \theta_R'(\xi) = 25.500 + 54.0\xi - 117.0(\xi + 0.25)^2 \end{aligned}\right\}\ \text{für rechte Einzellast}$$

Gesamt: $EI \cdot \theta_C(\xi) = 36.0\xi + 54.0\xi^2 - 78.0\xi^3 \quad + 3.000 + 27.0(\xi + .25)^2 - 39.0(\xi + .25)^3$

1. Ableitung: $EI \cdot \theta_c'(\xi) = 25.500 + 54.0\xi - 117(\xi + .25)^2$

Lösung: Nullstelle der 1. Ableitung:

$$\xi_1 = -0,2293 \quad \Rightarrow \textit{außerhalb Feld } 2$$
$$\xi_2 = 0,5242 \quad \Rightarrow \textit{ergibt } \max \theta_c$$

$$EI \cdot \theta_c(\xi = 0,5242) = 23,56\,kNm^2$$