Die semiklassische Rolle periodischer Bahnen im gemischten Phasenraum

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
vorgelegt am Fachbereich Physik der
Universität – Gesamthochschule – Essen

von

Henning Schomerus

aus Marl

Essen, Dezember 1997

Referent:	Prof. Dr. rer. nat. Fritz Haake
Korreferent:	Prof. Dr. rer. nat. Robert Graham
externer Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Hans A. Weidenmüller
Disputation:	Essen, am 3. Dezember 1997

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung und Übersicht

Semiklassische Methoden sind seit jeher ein fester Bestandteil der Quantenmechanik. Um mit ihnen Informationen über ein quantenmechanisches System zu erhalten, macht man sich Kenntnisse über das klassische Gegenstück zunutze. Von besonderem Interesse sind Eigenschaften des Energiespektrums, etwa die Lage der Energieniveaus, aber auch ihre statistischen Korrelationen. Manche dieser Eigenschaften sollten im semiklassischen Grenzfall, in dem die Plancksche Konstante gegen Null geschickt wird, gut beschrieben werden.

Die Quantisierungsvorschrift von Bohr und Sommerfeld, die noch aus der Zeit vor der eigentlichen Formulierung der Quantenmechanik stammt, beruht bereits auf der in der Semiklassik so fundamentalen Wirkung und erscheint im Rückblick als eine semiklassische Technik zur Festlegung der Eigenenergien integrabler Systeme. Eine saubere Formulierung findet sie in der Einstein–Brillouin–Keller (EBK)–Quantisierung [1–4]. Auch in der Folgezeit war das Interesse an einer vertieften Kenntnis des Zusammenhangs zwischen klassischer und Quantenmechanik groß. Arbeiten etwa von Van Vleck [5] und Dirac [6] über den Propagator waren nicht nur zum Verständnis der Quantenmechanik von Bedeutung, sondern auch für ihre Weiterentwicklung (siehe dazu [7]; man denke zudem an Pfadintegrale [8,9]). Sie sind der Ausgangspunkt für Überlegungen, die Gutzwiller schließlich zur Formulierung einer bemerkenswerten Beziehung für Systeme mit einem chaotischen klassischen Verhalten leiteten [10,11].

In ihr wird die spektrale Dichte $d(E) = \sum_i \delta(E - E_i)$ der Energieniveaus als Summe individueller Beiträge *periodischer Bahnen* ausgedrückt, solcher Trajektorien also, die mit einer gewissen Periode immer wieder zum selben Punkt im Phasenraum zurückkehren. Da in der Herleitung der Beziehung die Spur der Resolventen $\frac{1}{\hat{H}-E}$ auftritt, nennt man sie auch *Gutzwillersche Spurformel*. Eine ähnliche Beziehung wurde von Tabor für zeitlich periodisch getriebene Systeme formuliert. Bei diesen setzt sich die Spur des Zeitentwicklungsoperators aus Beiträgen periodischer Bahnen zusammen [12,13].

Da die Komplexität chaotischer Systeme erst im Verlauf der sechziger Jahre im vollen Ausmaß in den Blickpunkt geriet, mag es verwundern, daß die analoge Verknüpfung für integrable Systeme erst nach Gutzwillers Entdeckung von Balian und Bloch [14] sowie Berry und Tabor [15,16] gefunden wurde (siehe auch [17]).

Ist der Kreis damit ganz geschlossen? Tatsächlich hat man einen weiten Bogen geschlagen. Ausgangspunkt sind die integrablen Systeme und die EBK–Quantisierungsvorschrift sowie die analoge WKB–Näherung der Wellenfunktion. Dies führt dann über den semiklassischen Van–Vleck–Propagator zur Quantisierung global chaotischer (hyperbolischer) Systeme. Nun sind dies jedoch zwei Ecksteine, zwischen denen sich das Terrain auszuloten lohnt, denn in der Regel wird man es weder mit der einen noch mit der anderen Klasse von Systemen zu tun haben. Typisch sind Systeme mit einer Dynamik irgendwo zwischen völlig regulärem und chaotischem Verhalten [18].

Das Terrain besteht aus den Systemen mit gemischtem Phasenraum, denen in dieser Arbeit unser besonderes Interesse gilt. Ihre Dynamik ist durch das Zusammenspiel regulärer und chaotischer Bereiche im Phasenraum geprägt. Dies führt zu reichhaltigen Strukturen, die auch bei der Suche nach den semiklassischen Eigenenergien beachtet werden müssen. Für solche Systeme wurden bis dato semiklassisch nur *Modulationen* des Spektrums über den Abstand vieler Energieniveaus erfolgreich erklärt. Unser Ziel ist die Berechnung *vollständiger* Spektren mit größtmöglicher Auflösung.

Wir beginnen mit der Betrachtung eines speziellen Systems, des periodisch getriebenen Kreisels (Kapitel 2) [19–29]. Damit haben wir ein System zur Hand, an dem wir sowohl quantenmechanische als auch semiklassische und klassische Eigenschaften untersuchen und miteinander verknüpfen können. Der Kreisel beruht auf der Dynamik eines periodisch getriebenen Drehimpulses. Die Quantenmechanik spielt sich in den Darstellungen der Drehimpulsalgebra ab. Sie werden durch die Quantenzahl j charakterisiert. In jeder Darstellung ist der Hilbertraum von endlicher Dimension $2j + 1$. In der Semiklassik spielt $(j + \frac{1}{2})^{-1}$ die Rolle der effektiven Planckschen Konstanten. Im Grenzfall unendlicher Darstellungsdimension erhält man das klassische System. Es hat einen Freiheitgrad und besitzt die Oberfläche der Einheitskugel als Phasenraum. Wegen der Periodizität der den Kreisel treibenden Kraft steht für uns vor allem seine stroboskopische Zeitentwicklung im Vordergrund. Quantenmechanisch wird sie durch den Floquetoperator beschrieben. Er ist der Zeitentwicklungsoperator über eine Periode. Klassisch reduziert sich die Beschreibung auf eine Abbildung des Phasenraums auf sich selbst. In der in dieser Arbeit betrachteten Variante erfährt der Drehimpulsvektor eine Abfolge linearer und nichtlinearer Drehungen um die Koordinatenachsen. Wir parametrisieren das System so, daß sich der Übergang von integrabler Dynamik hin zu ausgeprägtem Chaos vollziehen läßt. Einen ersten Einblick in die Natur der Dynamik geben Phasenraumportraits.

Im Mittelpunkt unserer Anstrengungen steht das Energiespektrum. Es soll semiklassisch aus den Eigenschaften der periodischen Bahnen gewonnen werden. Daher beschäftigen wir uns im dritten Kapitel mit den mit diesen Bahnen verbundenen Aspekten der klassischen Mechanik. Die Bahnen werden durch vier kanonisch invariante Größen beschrieben, und zwar ihre Wirkung, ihren Stabilitätsfaktor, den Maslovindex und schließlich ihre Periode. Sie sind alle mit den Erzeugenden der stroboskopischen zeitlichen Entwicklung verknüpft. Diese Funktionen beschreiben die Dynamik in der Form einer kanonischen Transformation von den End- zu den Anfangskoordinaten. Neben den allgemeinen Zusammenhängen werden auch die für den Kreisel spezifischen Ausdrücke bereitgestellt.

Ausgangspunkt für die ausführliche Untersuchung des dynamischen Verhaltens ist die klassische Störungstheorie [30–32]. So lassen sich etwa die im Phasenraumportrait vorgefundenen Kennzeichen regulärer oder irregulärer Dynamik erklären, wobei man weit über ein qualitatives Verständnis hinaus gelangt. Die Vorgehensweise ist recht allgemein gehalten. Es werden die charakteristischen Eigenschaften der Bahnen behandelt und ihr Wechselspiel im Phasenraum genauer untersucht. Der Phasenraum integrabler Systeme ist von Tori ausgefüllt. Schon der Übergang zu schwacher Nichtintegrabilität mit dem wohlbekannten Auseinanderbrechen der rationalen Tori läßt sich störungstheoretisch behandeln. Auf dem weiteren Weg zum Chaos spielen insbesondere Bifurkationen eine Rolle. Bei diesen Ereignissen treffen mehrere periodische Bahnen in Abhängigkeit einer Kopplungsstärke (oder der Energie in autonomen Systemen) im Phasenraum aufeinander. Man klassifiziert sie anhand der Kodimension und dem Verhältnis der Perioden der beteiligten Bahnen. Für allgemeine Systeme trifft man typischerweise auf die von Meyer und Bruno aufgespürten Bifurkationen der Kodimension eins [33–35]. Für jeden Bifurkationstyp lassen sich Normalformen für die Hamiltonfunktion und die Erzeugende angeben, die das Verhalten der Bahnen in der Nähe der Bifurkation beschreiben [30,36]. Wir berühren auch die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Störungsentwicklung [26,27,37]. Sequenzen einfacher Bifurkationen werden wir durch Bifurkationen höherer Kodimension beschreiben [38,39,28]. Zum Abschluß von Kapitel 3 suchen wir die einfachsten Bifurkationen des Kreisels auf und konstruieren aus ihnen die kürzesten periodischen Bahnen in einem gewissen Parameterbereich.

Im vierten Kapitel übersetzen wir die gewonnenen Einsichten aus der klassischen Dynamik in semiklassische Beiträge zur Spur des Floquetoperators. In den Spuren der Potenzen des Operators sind seine Eigenwerte und damit die Niveaus des Systems kodiert. Der Zugriff erfolgt über das charakteristische Polynom. Zu dessen Konstruktion ziehen wir die überaus hilfreiche Selbstinversitätsbeziehung [40] heran. Als Startpunkt zur Bestimmung der Spuren dient ein Ausdruck in der Form eines Integrals über den klassischen Phasenraum. Er leitet sich aus der Van–Vleck–Näherung des Floquetoperators her. Das Integral wird weiter mittels der Methode des stärksten Abklingens des Integranden behandelt [41,42]. Diese hat ihren Ursprung in der Theorie asymptotischer Entwicklungen und beruht auf einer Deformation der Integrationsmannigfaltigkeit ins Komplexe. Die Hauptbeiträge zum Integral lassen sich auf Integrationsgebiete in der Umgebung periodischer Bahnen zurückführen. Auch periodische Bahnen mit komplexen Koordinaten, sogenannte Geister, tauchen dabei auf [23,43]. In diesem Zusammenhang werden zudem globale Bifurkationen wichtig, und zwar in der Form von Stokesübergängen, bei denen Geister von der Integrationsmannigfaltigkeit wegwandern [44,45].

Für hinreichend weit voneinander entfernte Bahnen führt eine Näherung nach der Methode der stationären Phase zu den von Gutzwiller angegebenen „isolierten“ Beiträgen. In der Nähe einer Bifurkation muß man auf die Normalformen aus Kapitel 3 zurückgreifen und erhält dann kollektive Beiträge bifurkierender Bahnen in Form sogenannter Diffraktionsintegrale. In einer ersten Stufe wird man auf die lokalen Näherungen von Ozorio de Almeida und Hannay geführt [30,36]. Sie sind in unmittelbarer Nähe zur Bifurkation brauchbar, versagen jedoch mit wachsender Entfernung sowie im semiklassischen Grenzfall. Der Schlüssel zu Ausdrücken mit einem sinnvollen semiklassischen Verhalten in beliebiger Entfernung zur Bifurkation liegt in der Konstruktion gleichförmiger Näherungen. Dabei muß man sich die Normalformen nochmals genauer anschauen und auch Terme höherer Ordnung in der Störungsentwicklung betrachten. Die Beiträge lassen sich in vielen Fällen sogar in eine geschlossene Form bringen und sind ansonsten mittels numerischer Methoden zugänglich [26,27,37]. Die Normalformen und Diffraktionsintegrale stehen in enger Beziehung zur Katastrophentheorie, die bei unseren Überlegungen häufig im Hintergrund steht [46–51].

Im numerischen Kapitel 5 werden die Beiträge zunächst im Detail anhand des Kreisels getestet. Als Testwerkzeug benutzen wir das sogenannte Wirkungsspektrum. So lassen sich einzelne Beiträge individuell auf ihre Güte hin untersuchen. Es zeigt sich, daß die verschiedenen Beiträge in der gleichförmigen Näherung hinreichend großer Kodimension von guter Qualität sind. Sie sind in der Regel mit einem Fehler der Ordnung der effektiven Planckschen Konstanten $(j+\frac{1}{2})^{-1}$ versehen. Die lokalen Näherungen versagen ebenso wie die isolierte Näherung nach Gutzwiller.

Dann trauen wir uns an die Spuren des Floquetoperators heran. Wie beim Wirkungsspektrum untersuchen wir sowohl den gesamten Übergang von Integrabilität zu ausgeprägtem Chaos als auch den semiklassischen Grenzfall im Detail. Insbesondere zeigen wir im Vergleich verschiedener Stufen der semiklassischen Näherung, daß die unternommenen Anstrengungen unausweichlich sind. In den besten Näherungen, den gleichförmigen Näherungen mit hinreichend großer Kodimension, wird man zum Trost zu guten Ergebnissen geführt.

Aus den Spuren lassen sich schließlich die Energieniveaus bestimmen. Wir erlangen Resultate für die Quantenzahlen $j=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots,3$. In den aufwendigsten Näherungen stimmen sie gut mit den exakten überein. Die mittlere Abweichung der Energien beträgt nur wenige Prozent ihres typischen Abstands. Für zwei integrable Kreiselvarianten stimmen die semiklassischen Spuren und Niveaus sogar mit den exakten überein.

Die Ergebnisse werden im abschließenden sechsten Kapitel diskutiert. Dort werden insbesondere offene Fragen zur Sprache gebracht. Die spannendste ist sicher, wie sich die Güte des Spektrums und der zu seiner Gewinnung zu betreibende Aufwand im weiteren Zusteuern auf den klassischen Grenzfall verhält.

2 Der periodisch getriebene Kreisel

Systeme mit einem klassischen Freiheitsgrad, die zeitlich periodisch getrieben werden, stellen den einfachsten Fall im allgemeinen nichtintegrabler Systeme dar. Sie besitzen in der Regel einen gemischten Phasenraum. Eine schon häufig untersuchte Klasse solcher Systeme, gerne auch versehen mit dem Namen „periodisch getriebener Kreisel“, basiert auf der Dynamik eines Drehimpulsvektors $\mathbf{J}$ konstanter Länge [19–29].

Wir stellen im Laufe dieses Kapitels eine bestimmte mit einem Kontrollparameter behaftete Kreiselvariante vor, anhand derer der Übergang von klassisch regulärem, integrablem Verhalten hin zu ausgeprägtem Chaos untersucht werden soll, und diskutieren einige ihrer quantenmechanischen und klassischen Eigenschaften.

2.1 Quantenmechanische Beschreibungsweise

Wir wollen zunächst einige grundlegende Eigenschaften periodisch getriebener Kreisel aufzeigen, die sich aus dem bloßen Umstand ergeben, daß sie durch die Komponenten J_x, J_y, J_z eines Drehimpulsvektors $\mathbf{J}$ konstanter Länge beschrieben werden. Diese Eigenschaften sind vor allem algebraischer Natur und betreffen etwa die Struktur des Hilbertraums. Sie folgen zwangsläufig aus den Kommutatorrelationen

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm} J_m \ , \tag{2.1}$$

der sogenannten Drehimpulsalgebra, und dem Umstand, daß der Hamiltonoperator $\hat{H}$ selbst eine Funktion dieser Komponenten ist. Wir haben hier übrigens formal $\hbar = 1$ gesetzt und werden später sehen, daß die effektive Plancksche Konstante mit der Länge des Drehimpulsvektors verknüpft ist.

Für zeitlich periodisch getriebene Systeme wie den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten liegt ferner eine stroboskopische Beschreibungsweise nahe. In ihrem Rahmen interessiert man sich für den Zustand des Systems zu diskreten Zeiten im Abstand einer Periodendauer. Die Zeitentwicklung des Systems über eine Periode hinweg wird quantenmechanisch durch den unitären Floquetoperator F beschrieben. Wir werden seine Bedeutung in einem weiteren Paragraphen dieses Abschnitts näher studieren und dann unsere Kreiselvariante vorstellen.

2.1.1 Die Drehimpulsalgebra und der Hilbertraum

Die Drehimpulsalgebra ist die generierende Algebra der Drehgruppe SU(2). Der Hilbertraum der einen Drehimpuls charakterisierenden Zustände zerfällt in die irreduziblen Darstellungsräume dieser Gruppe. Für jeden Wert $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ der Quantenzahl j gibt es genau eine Darstellung. In ihr ist die Länge des Drehimpulses zu $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$ und die Hilbertraumdimension zu $N = 2j+1$ festgelegt.

Eine mögliche Hilbertraumbasis zu festem j besteht aus den Eigenzuständen $|j,m\rangle$ von J_z, mit $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ und

$$J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle \, , \tag{2.2}$$

$$\mathbf{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \, . \tag{2.3}$$

Da $\mathbf{J}^2$ mit jeder einzelnen Drehimpulskomponente und somit auch mit dem Hamiltonoperator vertauscht, bildet die Länge des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße, $\mathbf{J}^2 = \text{const}$. Die zeitliche Entwicklung findet somit effektiv in den irreduziblen Unterräumen statt, auf die man sich bei der Beschreibung des dynamischen Verhaltens beschränken kann. Die Hilbertraumdimension des dadurch erhaltenen Systems ist endlich; Operatoren haben ein diskretes, endliches Spektrum. Dies wird sich im Hinblick auf die semiklassische Bestimmung des Spektrums des stroboskopischen Zeitentwicklungsoperators als sehr vorteilhaft erweisen.

2.1.2 Die stroboskopische Beschreibung periodisch getriebener Systeme

Der unitäre Zeitentwicklungsoperator $U(t';t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung eines Zustandes gemäß

$$|\psi(t')\rangle = U(t';t)|\psi(t)\rangle \, . \tag{2.4}$$

Im Falle eines N–dimensionalen Hilbertraums läßt er sich bezüglich einer Orthonormalbasis als unitäre $N \times N$–Matrix auffassen. Seine Beziehung zum Hamiltonoperator ergibt sich aus der Differentialgleichung $i\hbar\dot{U}(t;0) = H(t)U(t;0)$ mit der Randbedingung $U(0;0) = \hat{\mathbb{1}}$. Er gehorcht zudem der Halbgruppeneigenschaft

$$U(t'';t) = U(t'';t')U(t';t) \, . \tag{2.5}$$

Besitzt der Hamiltonoperator $H(t)$ eine periodische Zeitabhängigkeit,

$$H(t+T) = H(t) \tag{2.6}$$

mit der Periode T, so schlägt sich dies in der Beziehung

$$U(nT;0) = U^n(T;0) \equiv F^n \tag{2.7}$$

für den Zeitentwicklungsoperator nieder: Die Dynamik über mehrere Perioden hinweg wird durch die Potenzen des Zeitentwicklungsoperators F für eine Periode vermittelt. Dies ist der sogenannte Floquetoperator. In einer stroboskopischen, d. h. zeitlich diskreten Betrachtungsweise beschreibt dieser Operator die Entwicklung eines Systemzustands mittels

$$|\psi(nT)\rangle = F^n|\psi(0)\rangle \tag{2.8}$$

und verknüpft so den Zustand $|\psi(nT)\rangle$ des Systems zur Zeit nT, $n \in \mathbb{Z}$, mit dem zur Zeit Null.

Da auch F unitär ist, liegen seine Eigenwerte in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis und lassen sich in der Form $\exp[-i\varphi]$ schreiben. Die reellen Eigenphasen φ sind nur modulo 2π bestimmt; es läßt sich etwa $\varphi \in [0, 2\pi)$ fordern. Wir gehen von einem Hilbertraum endlicher Dimension N aus, so daß die Eigenwerte diskret sind; wir numerieren die Phasen φ_k mit dem Index $k = 1, 2, \ldots, N$ und bezeichnen die zugehörigen Eigenzustände mit $|\varphi_k\rangle$. Es sei also

$$F|\varphi_k\rangle = e^{-i\varphi_k}|\varphi_k\rangle \ . \tag{2.9}$$

Befindet sich das System in einem Eigenzustand des Floquetoperators, so bleiben die Erwartungswerte $\langle\psi(nT)|\hat{A}|\psi(nT)\rangle$ aller Meßgrößen $\hat{A}$ stroboskopisch konstant. Man bezeichnet die Eigenzustände daher auch als „quasistationäre Zustände“, die Phasen φ_k nennt man in analoger Weise „Quasienergien“ und ihre Gesamtheit das „Quasienergiespektrum“.

2.1.3 Unsere Kreiselvariante

Wir betrachten einen Kreisel, der während jeder Periode eine Abfolge von Drehungen und Torsionen um die Koordinatenachsen durchführt. Er zeichnet sich für allgemeine Wahl der Kopplungskonstanten durch die Abwesenheit aller geometrischen Symmetrien aus und ist auch nicht zeitumkehrinvariant. Es sei bereits erwähnt, daß sein klassisches Gegenstück im allgemeinen einen gemischten Phasenraum besitzt und für große Torsionsstärken ausgeprägt chaotisches Verhalten aufweist. Floquetoperatoren dieser Art waren aus diesem Grund schon häufig Gegenstand „quantenchaotischer“ Untersuchungen [19–29]. So lassen sich viele statistische Eigenschaften des Quasienergiespektrums im Rahmen der Zufallsmatrixtheorie [21,52–54] beschreiben (siehe zum Beispiel [55]). Die Matrixelemente des Floquetoperators können zudem auch auf semiklassischem Wege bestimmt werden. So hat man bereits recht genaue semiklassisch genäherte Spektren erhalten [24,25]. Auch in dieser Arbeit werden wir uns dem Spektrum des Floquetoperators mittels einer semiklassischen Strategie nähern, allerdings nicht über die Matrixelemente, sondern über die Spuren seiner Potenzen, $\operatorname{tr} F^n$, und unter Benutzung periodischer Bahnen.

Wir wollen nun den Floquetoperator definieren und stellen dazu erst einmal kurz seine beiden grundlegenden Bestandteile vor: Dies sind zum einen Drehungen um den Winkel β bezüglich der Achse $i = x, y, z$. Sie werden durch den unitären Operator

$$R_i(\beta) = \exp\left[-i\beta J_i\right] \tag{2.10}$$

beschrieben. (Es sei daran erinnert, daß die Komponenten J_i die Generatoren der Drehgruppe sind.) Zum anderen haben wir Torsionen der Stärke k, worunter man Drehungen bezüglich einer Achse i versteht, bei denen der Drehwinkel linear von der momentanen i–Komponente des Drehimpulses abhängt. (Wir greifen hier der klassischen Interpretation vor.) Der entsprechende Operator lautet

$$T_i(k) = \exp\left[-i\frac{k}{2j+1}J_i^2\right] \ . \tag{2.11}$$

Er ist zwar kein Element der Drehgruppe, aber ein Element der Darstellungsgruppe $\mathrm{U}(N)$ der unitären Transformationen im Hilbertraum. Die Erzeugenden dieser Gruppe sind die hermiteschen Operatoren, welche wiederum die Observablen des Systems beschreiben. Auch Potenzen und Summen hermitescher Operatoren sind hermitesch — der Generator von $T_i(k)$ ist daher für gegebenes j bzw. N wohldefiniert. Wie sich noch zeigen wird, garantiert die Skalierung der Torsionsstärke k mit $2j+1$ ein wohldefiniertes Verhalten im klassischen Grenzfall.

Unser Floquetoperator hat nun die konkrete Form

$$\begin{aligned} F &= R_z(\alpha_2)T_z(k_2)R_y(\beta_2)\cdot R_z(\alpha_1)T_z(k_1)R_y(\beta_1) \\ &\equiv \tilde{F}(\alpha_2, k_2; \beta_2)\cdot \tilde{F}(\alpha_1, k_1; \beta_1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

und ist somit das Produkt zweier (durch $\cdot$ voneinander abgesetzter) formal gleicher, einfacherer Operatoren

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha, k; \beta) &= R_z(\alpha)T_z(k)R_y(\beta) \\ &= \exp\left[-i\alpha J_z - i\frac{k}{2j+1}J_z^2\right]\exp\left[-i\beta J_y\right] \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wir benutzen die Abkürzung

$$\tilde{F}_i = \tilde{F}(\alpha_i, k_i; \beta_i) \ , \tag{2.14}$$

um an vielen Stellen Schreibarbeit zu sparen.

Sowohl in der klassischen als auch in der Quantenmechanik vereinfacht sich durch geschickte Koordinaten- bzw. Basiswahl die Behandlung der (im Vergleich zu den Drehungen komplizierteren) Torsionen erheblich. Der Floquetoperator läßt sich etwa bequem in der $|j,m\rangle$–Basis bestimmen, in der die Torsionen bereits diagonal sind. Die Rotationsoperatoren R_y, auch bekannt unter dem Namen Wignersche d–Matrizen, erhält man in dieser Basis mit geringem Aufwand durch die Anwendung von Rekursionsformeln, wie etwa in [25] ausführlich diskutiert ist.

Auch unserem Kreisel kann man ein zeitlich kontinuierliches System zugrundelegen. Bei der Herleitung einiger Ergebnisse wird sich dies als nutzbringend erweisen. Verschiedene Hamiltonoperatoren können dasselbe stroboskopische Verhalten erzeugen. Wir verfügen daher über ein gewisses Maß an Freiheit. Vorteilhaft ist die Wahl eines „stückweise autonomen" Hamiltonoperators. Dazu unterteilen wir das Periodenintervall in vier Teilstücke der Längen T_i mit $\sum_{i=1}^{4} T_i = T$. Während eines jeden dieser Zeitabschnitte soll der Hamiltonoperator zeitunabhängig sein und abwechselnd entweder eine lineare Drehung um die y–Achse oder eine nichtlineare Drehung um die z–Achse beschreiben,

$$\hat{H}(\mathbf{J},t) = \begin{cases} \frac{1}{T_1}\beta_1 J_y & 0 \le t < T_1 \\ \frac{1}{T_2}\left(\frac{k_1}{2j+1}J_z^2 + \alpha_1 J_z\right) & T_1 \le t < T_1 + T_2 \\ \frac{1}{T_3}\beta_2 J_y & T_1 + T_2 \le t < T - T_3 \\ \frac{1}{T_4}\left(\frac{k_2}{2j+1}J_z^2 + \alpha_2 J_z\right) & T - T_3 \le t < T \end{cases} . \tag{2.15}$$

Den Floquetoperator erhält man über die Halbgruppeneigenschaft (2.5) aus den Operatoren $U(T_1;0) = R_y(\beta_1)$, $U(T_1+T_2;T_1) = R_z(\alpha_1)T_z(k_1)$, $U(T-T_3;T_1+T_2) = R_y(\beta_2)$ und $U(T;T-T_3) = R_z(\alpha_2)T_z(k_2)$.

2.2 Das klassische Gegenstück

Im klassischen Grenzfall großer Hilbertraumdimension $2j+1 \equiv 2J \to \infty$ kommutieren die Komponenten der skalierten Größe $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{J}/J$ bis auf eine verschwindende Korrektur, $[\hat{X}_k, \hat{X}_l] = \frac{i}{J}\varepsilon_{klm}\hat{X}_m$. Man kann sie daher als klassische Observablen $\mathbf{X} = (X,Y,Z)$ auffassen. Der Parameter J spielt also die Rolle des Inversen der Planckschen Konstanten, während wir bereits in (2.1) formal $\hbar = 1$ gesetzt haben. Allgemeine Eigenschaften von Systemen, deren klassischer Grenzfall für große Hilbertraumdimension erreicht wird, sind etwa in [56] beschrieben.

Den direktesten Zugang zur klassischen stroboskopischen Dynamik wählt man, indem man ins Heisenbergbild wechselt und in der stroboskopischen Quantenabbildung $\hat{\mathbf{X}}(nT) = F^{\dagger n}\hat{\mathbf{X}}(0)F^n$ formal von den reskalierten Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{X}}$ zu den c–Zahlen $\mathbf{X}$ übergeht. Die dadurch erhaltene klassische stroboskopische Abbildung $\mathfrak{F}$

über eine Periode setzt sich — wie der Floquetoperator zuvor — aus einer Abfolge von Drehungen und Torsionen zusammen, gemäß der Verknüpfung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z(\alpha_2, k_2) \circ \mathfrak{F}_y(\beta_2) \circ \mathfrak{F}_z(\alpha_1, k_1) \circ \mathfrak{F}_y(\beta_1) \tag{2.16}$$

der Abbildungsvorschriften

$$\mathfrak{F}_y(\beta) : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X\cos\beta + Z\sin\beta \\ Y \\ -X\sin\beta + Z\cos\beta \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

und

$$\mathfrak{F}_z(\alpha, k) : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X\cos(\alpha + kZ) - Y\sin(\alpha + kZ) \\ X\sin(\alpha + kZ) + Y\cos(\alpha + kZ) \\ Z \end{pmatrix} . \tag{2.18}$$

Wir wollen das klassische System nun genauer kennenlernen und uns etwa mit der Struktur des Phasenraums samt den dynamischen und algebraischen Eigenschaften der klassischen Observablen näher beschäftigen. Unser Ziel ist zunächst, kanonisch konjugierte Orte und Impulse zu identifizieren. Ausgehend von einer bestimmten Koordinatenwahl formulieren wir dann erneut die stroboskopische Abbildung $\mathfrak{F}$. Schließlich betrachten wir Phasenraumportraits und gewinnen so einen qualitativen Einblick in das dynamische Verhalten. Die Untersuchung des klassischen Systems setzen wir in Kapitel 3 in Hinblick auf ein tieferes Verständnis seines dynamischen Verhaltens fort.

2.2.1 Der Phasenraum

Wie schon die quantenmechanischen Operatoren und der Hilbertraum ist auch die geometrisch–algebraische Struktur des klassischen Systems im wesentlichen durch die Drehimpulsalgebra festgelegt, die nun $\{X, Y\} = Z$, etc., lautet. Hier sind mit $\{\,,\,\}$ die Poissonklammern gemeint. Sie gehen in üblicher Weise durch die Ersetzung $[\,,\,] \to \frac{i}{j}\{\,,\,\}$ aus den Kommutatoren hervor.

Das klassische System wird weiter wie gewöhnlich durch eine Hamiltonfunktion H und die Bewegungsgleichungen $\dot{A} = \{H, A\}$ beschrieben. Die klassische Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{X}, t) = \hat{H}(J\mathbf{X}, t)/J = \begin{cases} \frac{1}{T_1}\beta_1 Y & 0 \leq t < T_1 \\ \frac{1}{T_2}\left(\frac{k_1}{2}Z^2 + \alpha_1 Z\right) & T_1 \leq t < T_1 + T_2 \\ \frac{1}{T_3}\beta_2 Y & T_1 + T_2 \leq t < T - T_3 \\ \frac{1}{T_4}\left(\frac{k_2}{2}Z^2 + \alpha_2 Z\right) & T - T_3 \leq t < T \end{cases} \tag{2.19}$$

ergibt sich dabei aus dem Hamiltonoperator (2.15) im wesentlichen durch die Ersetzung der Operatoren durch die klassischen Observablen; allerdings muß man noch mit J skalieren, um einen endlichen Ausdruck zu erhalten. Nun verstehen wir auch die Skalierung der Torsionsstärke k im Torsionsoperator (2.11) und im Hamiltonoperator (2.15).

Als Konsequenz der Erhaltung der Drehimpulslänge gilt $\mathbf{X}^2 = 1$. Der Phasenraum des erhaltenen klassischen Systems ist mithin die Oberfläche der Einheitskugel, S^2. Wir wollen nun kanonisch konjugierte Orts- und Impulskoordinaten bestimmen. Dazu halten wir fest, daß unter den Abbildungen (2.17, 2.18) das natürliche Flächenelement $d\Omega$ auf der Kugeloberfläche erhalten bleibt. Dies gilt auch für ganz allgemeine Drehimpulsdynamiken. Da man alle kanonischen Transformationen auch durch die zeitliche Entwicklung eines geeigneten Systems beschreiben kann, ist das Flächenelement infolgedessen eine kanonische Invariante. In Kugelkoordinaten

$$\mathbf{X} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \tag{2.20}$$

lautet es $d\Omega = d\varphi \wedge d\cos\vartheta$. Dies erlaubt es, den Azimutwinkel $\varphi \equiv q$ als verallgemeinerten Ort und die z–Komponente $Z = \cos\vartheta \equiv p$ von $\mathbf{X}$ als dazu kanonisch konjugierten Impuls aufzufassen. Diese kanonischen Variablen werden wir im folgenden immer wieder benutzen.

2.2.2 Klassische stroboskopische Dynamik

Die stroboskopische zeitliche Entwicklung $(q_n, p_n) \equiv \Big(q(t_0 + nT), p(t_0 + nT)\Big)$ des klassischen Systems leitet sich aus der Betrachtung des durch die Hamiltonfunktion

$$H(q,p,t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{T_1}\beta_1\sqrt{1-p^2}\sin q & 0 \le t < T_1 \\ \dfrac{1}{T_2}\left(\dfrac{k_1}{2}p^2 + \alpha_1 p\right) & T_1 \le t < T_1 + T_2 \\ \dfrac{1}{T_3}\beta_2\sqrt{1-p^2}\sin q & T_1 + T_2 \le t < T - T_3 \\ \dfrac{1}{T_4}\left(\dfrac{k_2}{2}p^2 + \alpha_2 p\right) & T - T_3 \le t < T \end{cases} \tag{2.21}$$

beschriebenen zeitlich kontinuierlichen Systems her. Die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \tag{2.22}$$

definieren eine bijektive Abbildung des Phasenraums auf sich selbst,

$$\mathfrak{F}^{(1)}: \quad (q,p) \to (q',p') \equiv \mathfrak{F}^{(1)}(q,p)\;, \tag{2.23}$$

die für gegebene Anfangsbedingungen q, p die Endkoordinaten q', p' nach dem Verstreichen einer Periode T liefert. Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt, daß diese Abbildung flächenerhaltend ist. Die stroboskopische zeitliche Entwicklung ergibt sich durch wiederholte Anwendung der Abbildung (2.23) für eine Periode,

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \mathfrak{F}^{(1)}(p_n, q_n)\;. \tag{2.24}$$

Die Abbildung $\mathfrak{F}^{(n)}$

$$\mathfrak{F}^{(n)}: \quad (p_0, q_0) \to (p_n, q_n) = \mathfrak{F}^{(n)}(p_0, q_0) \tag{2.25}$$

beschreibt die Dynamik über n Perioden hinweg und ergibt sich durch die n–fache Anwendung der ein–Schritt–Abbildung gemäß der Verknüpfung $\mathfrak{F}^{(n)} = \mathfrak{F}^{(n-1)} \circ \mathfrak{F}^{(1)}$.

Bei der Kreiselvariante setzt sich die Abbildung $\mathfrak{F}^{(1)} = \tilde{\mathfrak{F}}_2 \circ \tilde{\mathfrak{F}}_1$ in Analogie zum Floquetoperator erneut aus zwei einfacheren Teilschritten

$$\tilde{\mathfrak{F}}_i \equiv \tilde{\mathfrak{F}}(\alpha_i, k_i; \beta_i) : (q,p) \to \Big(\tilde{q}(q,p), \tilde{p}(q,p)\Big) \equiv \tilde{\mathfrak{F}}_i(q,p) \tag{2.26}$$

zusammen, mit

$$\tilde{p}(p,q) = p\cos\beta - \sqrt{1-p^2}\cos q \sin\beta \ , \tag{2.27}$$

$$\tilde{q}(p,q) = \arg\left[\sqrt{1-p^2}(\cos q\cos\beta + i\sin q) + p\sin\beta\right] + \alpha + k\tilde{p}(p,q)\,. \tag{2.28}$$

Abbildung 1 illustriert die Wirkung verschiedener Kombinationen von Drehungen und Torsionen auf ein Gitter im Phasenraum.

2.2.3 Eine Reise von Integrabilität zu ausgeprägtem Chaos

Ein durch einen einzelnen Dreh- oder Torsionsterm beschriebener Kreisel verhält sich regulär, da er auch als stroboskopisch betrachtetes System mit autonomer Hamiltonfunktion betrachtet werden kann. In der Kombination von Drehungen und Torsionen jedoch zeigt sich im allgemeinen irreguläres, nichtintegrables Verhalten. Um dies zu veranschaulichen, wählen wir feste Werte der Drehwinkel, $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_2 = 1.0 + \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0.8$, und fassen $k \equiv k_2 = 10\,k_1$ als einen frei verfügbaren Kontrollparameter auf. Wir betrachten also die Abbildung

$$\mathfrak{F}(k) = \tilde{\mathfrak{F}}\left(0.8, k; 1.0 + \frac{\pi}{2}\right) \circ \tilde{\mathfrak{F}}\left(0.3, 0.1k; -\frac{\pi}{2}\right) \ , \tag{2.29}$$

später auch den zugehörigen Floquetoperator

$$F(k) = \tilde{F}\left(0.8, k; 1.0 + \frac{\pi}{2}\right) \tilde{F}\left(0.3, 0.1k; -\frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{2.30}$$

Für $k = 0$ beschreibt $\mathfrak{F}$ eine gewöhnliche Drehung, für die gewählten Parameter um den Winkel

$$\Omega = 1.1936\ldots \tag{2.31}$$

bezüglich der Achse

$$\tilde{\mathbf{X}} = (0.114\ldots, -0.868\ldots, -0.484\ldots)\ . \tag{2.32}$$

Die Projektion des Drehimpulses auf $\tilde{\mathbf{X}}$ bleibt konstant; die stroboskopischen Trajektorien folgen den dadurch festgelegten kreisförmigen Höhenlinien.

In Abbildung 2 wird oben links die Situation für $k = 0$ anhand eines Phasenraumportraits verdeutlicht. Es ergibt sich, wenn man das Schicksal des Systems aus verschiedenen Anfangsbedingungen heraus eine endliche Zeit lang beobachtet. Man erhält den Eindruck sehr regulären Verhaltens. Die Trajektorien winden sich auf den Höhenlinien um die beiden Punkte $\pm\tilde{\mathbf{X}}$, an denen die Drehachse die Einheitskugel durchstößt. Sie bilden die Fixpunkte der klassischen Abbildung.

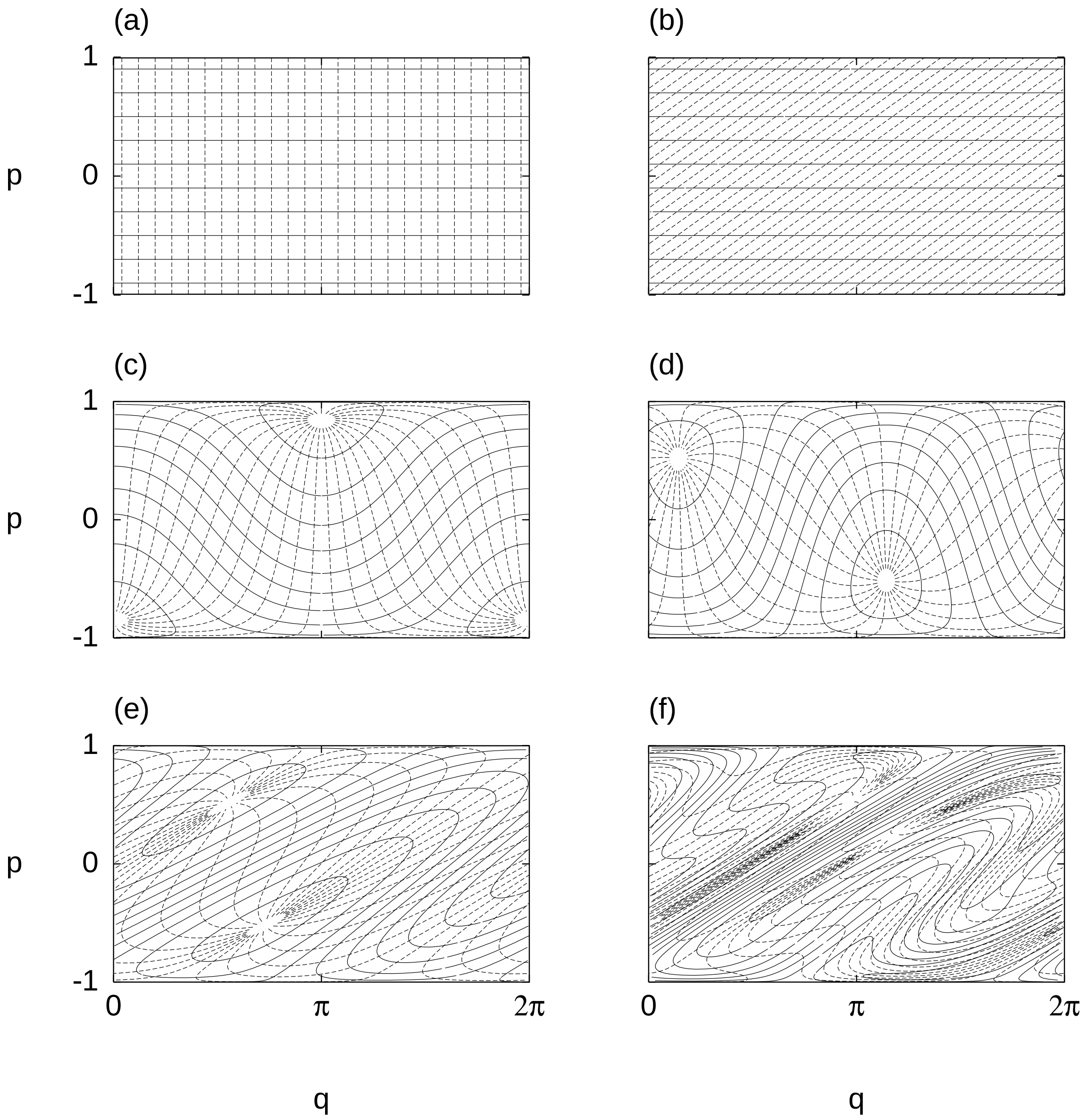


Abbildung 1: Wirkung kombinierter Teilschritte aus Rotationen und Torsionen auf den Phasenraum in den kanonischen Variablen $q = \varphi$ und $p = Z$. (a) Die Ausgangsstruktur entspricht Längen- und Breitengraden auf dem Globus mit Nord- und Südpol auf der z–Achse. Die Strukturen in den Bildern (b)–(f) resultieren aus (a) vermittels der Anwendung folgender Abbildungsvorschriften [vgl. Gln. (2.16–2.18), (2.26–2.28)]: (b) $\mathfrak{F}_z(0.8, 2.5)$: Torsion mit Stärke 2.5 und Drehung um den Winkel 0.8 bezüglich der z–Achse. (c) $\mathfrak{F}_y(1.0 + \frac{\pi}{2})$: Rotation bezüglich der y–Achse. (d) $\mathfrak{F}_z(0.8, 0) \circ \mathfrak{F}_y(1.0 + \frac{\pi}{2}) \circ \mathfrak{F}_z(0.3, 0) \circ \mathfrak{F}_y(-\frac{\pi}{2})$: Diese Kombination verschiedener Drehungen ist selbst eine Drehung und entspricht in der Parametrisierung (2.29) des Abschnitts 2.2.3 dem Fall $k = 0$. (e) Der Fall $k = 2.5$ in der Parametrisierung (2.29). (f) entsteht aus (e) durch nochmalige Anwendung der Abbildung (2.29) mit erneut $k = 2.5$.

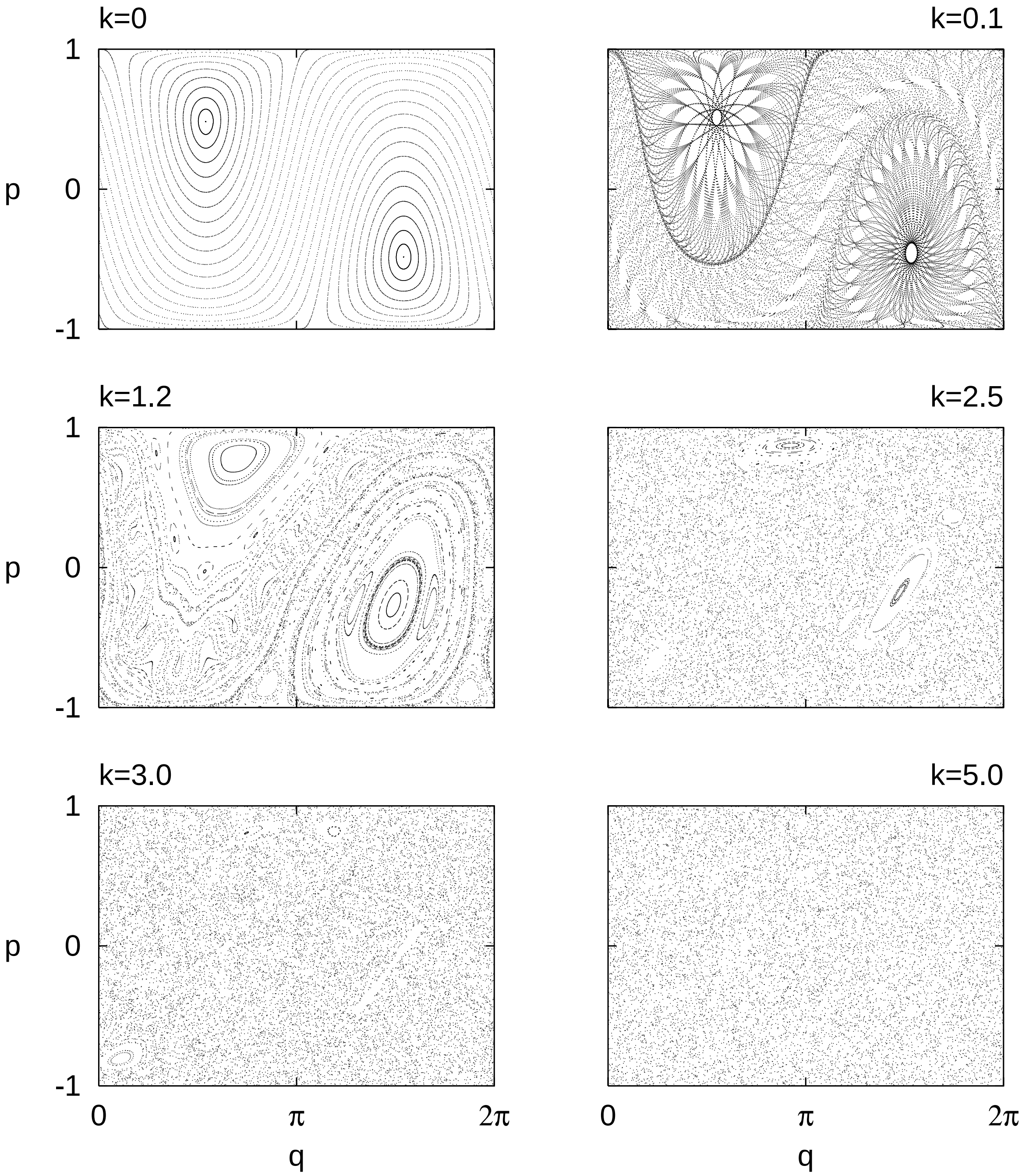


Abbildung 2: Phasenraumportraits des periodisch getriebenen Kreisels

Für leicht von 0 verschiedenes k, etwa bei $k = 0.1$, ergibt sich eine interessante Interferenzstruktur, die aus der Modulation der Höhenlinien zu verstehen ist. Das Phasenraumportrait für $k = 1.2$ wirkt hingegen überaus komplex. Man erkennt, daß die Fixpunkte ein Stück gewandert und nur noch in gewissem Maße von geschlossenen Linien umgeben sind. Es gibt einen Streifen irregulären Verhaltens, der sich um eine Vielzahl kleiner Inseln windet. Tatsächlich gibt es eine Unzahl von Strukturen, die in der gewählten Auflösung nicht sichtbar sind. So finden sich auch in den scheinbar regulären Bereichen irreguläre Streifen auf jeder beliebigen Größenskala und in diesen wiederum kleine Stabilitätsinseln. Das System befindet sich hier im Übergangsbereich vom nahezu integrablen Fall zum gemischten Phasenraum.

Für größere Torsionsstärke $k = 2.5$ hat sich irreguläres Verhalten bereits weit ausgedehnt und dominiert schon den Phasenraum. Zumindest drei reguläre Bereiche sind jedoch noch gut zu erkennen: Der Phasenraum ist gemischt.

Erhöht man die Torsionsstärke weiter, so bleibt von den regulären Inseln nicht mehr viel übrig, obwohl es tatsächlich weiterhin unendlich viele von ihnen gibt. Sie sind jedoch alle sehr wenig ausgedehnt. Man spricht hier von gut ausgeprägtem Chaos.

Der streng chaotische Fall, in dem alle Stabilitätsinseln tatsächlich verschwunden sind, wird allerdings selbst für beliebig große Torsionsstärken nicht erreicht.

Im folgenden Kapitel werden die Ursachen, die zu den hier sichtbar gewordenen qualitativen Unterschieden in der Dynamik führen, ausführlich geschildert.

3 Reguläres und irreguläres Verhalten und periodische Bahnen

Dieses Kapitel vermittelt einen tieferen Einblick in das dynamische Verhalten unseres Kreiselsystems. Wir orientieren uns dabei an den Notwendigkeiten der angestrebten semiklassischen Bestimmung der Quasienergien und stellen die später benötigten Kenntnisse bereit. Es werden aber auch recht allgemeine Aspekte getriebener klassischer Systeme mit einem Freiheitsgrad diskutiert [30–32,57].

Unser Interesse gilt insbesondere dem Übergang von regulärem, integrablem zu irregulärem, ausgeprägt chaotischem Verhalten. Am deutlichsten spiegelt sich das Systemverhalten in Phasenraumportraits wider, wie wir sie bereits an Beispielen für den Kreisel diskutiert haben. Der angesprochene Übergang läßt sich mittels der Betrachtung der periodischen Bahnen im Phasenraum wesentlich erhellen. Im integrablen Fall treten die periodischen Bahnen in Familien auf. Läßt man eine kleine nichtintegrable Störung zu, so werden die Familien durch Paare periodischer Bahnen ersetzt. Verändert man die Kopplungskonstanten weiter, kommt man schließlich in den Bereich ausgeprägt chaotischen Verhaltens. Das Schicksal der periodischen Bahnen auf dem Weg dorthin, einschließlich ihres Entstehens und Vergehens, wird vor allem von *Bifurkationen* geprägt, an denen sie mit anderen periodischen Bahnen zusammentreffen.

3.1 Eigenschaften periodischer Bahnen

Periodische Bahnen, im folgenden des öfteren auch Orbits genannt, sind Trajektorien, auf denen das System nach einer gewissen (hier: stroboskopischen) Zeit n, der Periode der Bahn, wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Die primitive Periode $n^{(0)}$ ist die Zeit, nach der das System zum ersten Mal wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückgelangt. Eine periodische Bahn besteht somit aus $n^{(0)}$ gleichberechtigten Punkten im Phasenraum.

Die periodischen Bahnen der Länge n sind die Lösungen der Fixpunktgleichung

$$\mathfrak{F}^{(n)}(q,p) = (q,p) \; . \tag{3.1}$$

Alle Bahnen der Länge n sind auch Bahnen der Länge mn, $m \in \mathbb{N}$. Man nennt die Bahn der Länge $n = mn^{(0)}$ auch die m–te Wiederkehr der periodischen Bahn.

Periodische Bahnen werden — abgesehen von ihrer primitiven Periode — im wesentlichen durch drei Größen charakterisiert, die alle invariant unter kanonischen Transformationen sind, also von der speziellen Wahl der Orts- und Impulskoordinaten nicht abhängen. Dies sind die Wirkung S, der Stabilitätsfaktor $\mathrm{tr}\, M$ und der Maslovindex ν. Sie leiten sich aus den erzeugenden Funktionen her.

3.1.1 Die erzeugenden Funktionen

Man kann die zeitliche Entwicklung des Systems über n Perioden hinweg auch durch eine kanonische Transformation

$$(q', p') \equiv \mathfrak{F}^{(n)}(q, p) \to (q, p) \tag{3.2}$$

beschreiben. So wird man auf die sogenannten erzeugenden Funktionen geführt, von denen es vier Varianten gibt. Sie sind alle mit der Formulierung der Bewegungsgleichungen als Randwertproblem verknüpft, wobei jeweils ein Anfangsort oder -impuls und ein Endort oder -impuls vorgegeben sind. In dieser Arbeit werden drei Varianten wichtig, die Funktion $\tilde{S}(q', q; n)$, die Funktion $\hat{S}(q', p; n)$ und schließlich die Funktion $\bar{S}(p', p; n)$. Die vierte Form $\check{S}(p', q; n)$ spielt keine Rolle.

Wir betrachten zunächst die Erzeugende $\tilde{S}(q', q; n)$ und damit die Lösungen des Randwertproblems $q_0 = q$, $q_n = q'$ der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Die Erzeugende beschreibt die Lösungen mittels der Beziehungen

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q'} = p', \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = -p\ . \tag{3.3}$$

Der Funktionswert von $\tilde{S}$ ist durch die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$\tilde{S}(q', q; n) = \int_{t_0}^{t_0+nT} [p\dot{q} - H(q, p, t)]\, dt \tag{3.4}$$

gegeben, wobei entlang einer Trajektorie integriert wird, die den erwähnten Randbedingungen genügt. Gemäß ihres Funktionswerts setzt sich die Erzeugende $\tilde{S}(q', q; n)$ additiv aus $\tilde{S}(q', q; 1)$ zusammen,

$$\tilde{S}(q', q; n) = \tilde{S}(q_n, q_{n-1}; 1) + \tilde{S}(q_{n-1}, q_{n-2}; 1) + \ldots + \tilde{S}(q_1, q_0; 1)\ . \tag{3.5}$$

Hier gehen als Hilfsgrößen die Zwischenkoordinaten $q_i(q, q')$ entlang der Trajektorie ein. Tatsächlich erfüllt $\tilde{S}(q', q; n)$ in dieser Form die Beziehungen (3.3). Dies zeigt man unter Verwendung der Identität

$$p_i = \frac{\partial \tilde{S}(q_i, q_{i-1}; 1)}{\partial q_i} = -\frac{\partial \tilde{S}(q_{i+1}, q_i; 1)}{\partial q_i}\ . \tag{3.6}$$

Sie gilt unter der hier erfüllten Bedingung, daß die q_i auf einer Trajektorie liegen.

Die Funktion $\hat{S}(q', p; n)$ löst das Randwertproblem $p_0 = p$, $q_n = q'$ vermittels

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial q'} = p', \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial p} = q\ . \tag{3.7}$$

Man erhält $\hat{S}$ aus $\tilde{S}$ durch eine Legendretransformation,

$$\hat{S}(q', p; n) = \tilde{S}(q', q(q', p); n) + q(q', p)p \ . \tag{3.8}$$

Wir werden im folgenden bei der konkreten Anwendung auf den Kreisel auch mit der Erzeugenden

$$\bar{S}(p', p; n) = \hat{S}(q'(p', p), p; n) - q'(p', p)p' \tag{3.9}$$

arbeiten, die aus $\hat{S}$ durch eine weitere Legendretransformation hervorgeht und die Lösungen des Randwertproblems $p_0 = p$, $p_n = p'$ beschreibt,

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial p'} = -q', \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} = q \ . \tag{3.10}$$

Sie ist, wie sich noch zeigen wird, semiklassisch aufs Engste mit der Wahl der Eigenzustände $|j, m\rangle$ von $\mathbf{J}^2$ und J_z als Basis im Hilbertraum verknüpft (vgl. Abschnitt 4.1.3).

Auch für den Fall, daß eine Abbildung aus der Abfolge mehrerer Teilschritte besteht, setzt sich der Wert der Erzeugenden additiv aus Beiträgen der Teilschritte zusammen. Wir wollen das ausnutzen, indem wir für unsere Kreiselvariante nur die einfachere Abbildung $\tilde{\mathfrak{F}}$ (2.26–2.28) betrachten, für die die Erzeugende bereits in anderen Arbeiten [25] hergeleitet wurde. Man erhält

$$\bar{S}(p', p) = -\sigma \, \mathrm{sign}(\sin\beta) \arccos \frac{\cos\beta - p'p}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p'^2}} + \frac{k}{2}p'^2 - q'p' + qp \tag{3.11}$$

mit

$$\begin{aligned} q &= \sigma \arccos \frac{p\cos\beta - p'}{\sin\beta\sqrt{1-p^2}} \ , & (3.12) \\ q' &= \sigma \arccos \frac{p - p'\cos\beta}{\sin\beta\sqrt{1-p'^2}} + kp' + \alpha \ . & (3.13) \end{aligned}$$

Es gibt zwei Funktionsäste, die sich durch $\sigma = \mathrm{sign}\, Y$ unterscheiden und auf diese Weise durch das Vorzeichen der kartesischen Y–Koordinate des skalierten Drehimpulsvektors vor dem Teilschritt festgelegt sind.

Von geringerem praktischen Nutzen erscheint auf den ersten Blick die rein ortsabhängige Wirkung

$$\begin{aligned} \tilde{S}(q', q) = & -\sigma \, \mathrm{sign}(\sin\beta) \arccos \Big[\cos(q' - \alpha - kp') \cos q \\ & + \sin(q' - \alpha - kp') \sin q \cos\beta \Big] + \frac{k}{2}p'^2 \qquad (3.14) \end{aligned}$$

zu sein, da $p'(q',q)$ nur als Lösung einer impliziten Gleichung bestimmt ist. Will man aber bloß den Wert von $\tilde{S}$ für eine konkrete Trajektorie wissen, ist also p' bereits bekannt, so kann man ohne weiteres auf die angegebene Form zurückgreifen.

Kommen wir nun wieder zu den periodischen Bahnen zurück. Die Fixpunktgleichungen $q = q'$, $p = p'$ [vgl. Gln. (3.1) und (3.2)] lassen sich in der Form

$$p'(q',q) - p(q',q) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q'} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = 0 \,, \qquad q = q' \tag{3.15}$$

schreiben. Die linke Seite der ersten Gleichung wird dabei als Funktion der beiden natürlichen Veränderlichen q und q' von $\tilde{S}$ aufgefaßt, die gemäß der zweiten Beziehung gleichgesetzt werden müssen. Man kann q und q' auch direkt in $\tilde{S}$ gleichsetzen und erhält dann

$$\frac{d\tilde{S}(q,q;n)}{dq} = 0 \,. \tag{3.16}$$

Analog erhält man die äquivalenten Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial p'} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial p} = 0 \,, \qquad p = p' \,, \tag{3.17}$$

oder auch

$$\frac{d\bar{S}(p,p;n)}{dp} = 0 \,, \tag{3.18}$$

sowie

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial p} = q' \,, \qquad \frac{\partial \hat{S}}{\partial q'} = p \,. \tag{3.19}$$

Die periodischen Bahnen stellen sich somit als Extrema der Funktionen $\tilde{S}(q,q;n)$, $\bar{S}(p,p;n)$ und $\hat{S}(q',p;n) - q'p$ dar.

3.1.2 Die Wirkung periodischer Bahnen

Die Wirkung S einer periodischen Bahn ist durch das Integral (3.4) gegeben, wobei entlang ihrer Trajektorie integriert wird. Dadurch erhält man eine kanonisch invariante Größe. Per Definition ist die Wirkung gleich dem Wert der Erzeugenden $\tilde{S}(q,q;n)$ an der Stelle des Fixpunkts. Es gilt dort $\bar{S}(p,p;n) = \tilde{S}(q,q;n)$, man kann also auch den Wert der Erzeugenden $\bar{S}(p',p;n)$ benutzen. Auch aus der Erzeugenden $\hat{S}$ kann man die Wirkung gewinnen,

$$S = \hat{S}(q,p;n) - qp \,. \tag{3.20}$$

Wir bezeichnen die Wirkung für die primitive Periodenlänge mit $S^{(0)}$. Dann ist die Wirkung für die m–te Wiederkehr $S = mS^{(0)}$.

Um für den Kreisel die Wirkung einer periodischen Bahn zu bestimmen, ziehen wir etwa die Erzeugende $\tilde{S}(q', q; n)$ heran. Dabei steht es uns frei, geeignetere Koordinaten anstelle von Anfangs- und Endort zu wählen, um ein kompakteres Resultat als (3.14) für den Beitrag eines jeden Teilschritts $\tilde{\mathfrak{F}}$ zu erhalten. Wir werden dies hier sogleich herleiten: Teilen wir das Integrationsintervall im definierenden Zeitintegral

$$S^{(0)} = \int_0^{n^{(0)}T} (p\dot{q} - H)\, dt \tag{3.21}$$

mit der Hamiltonfunktion (2.21) in die bekannten vier Teilstücke für jeden Abbildungsschritt $\mathfrak{F}^{(1)}$ ein, so setzt sich die Wirkung additiv aus Beiträgen von Drehungen um die y- und Torsionen um die z–Achse zusammen. Man bestimmt nun $\dot{q}$ aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und setzt eine Lösung dieser Gleichungen in den Integranden ein. Eine Drehung um die y–Achse liefert dann den Beitrag

$$\begin{aligned} S_y &\equiv -Y \int_0^{\beta} \frac{1}{1 - (Z\cos t - X\sin t)^2}\, dt \\ &= \arctan\left(\frac{X}{YZ}\right) - \arctan\left(\frac{X'}{Y'Z'}\right) \ , \end{aligned} \tag{3.22}$$

wobei die ungestrichenen Größen die Koordinaten vor und die gestrichenen jene nach dem Teilschritt bezeichnen. Dabei ist $Y = Y'$. Der Drehwinkel taucht in dieser Schreibweise nur implizit auf. Für verschwindenden Drehwinkel verschwindet auch der Beitrag zur Wirkung, während er etwa für eine Drehung um 2π gerade $-2\pi\,\mathrm{sign}\, Y$ beträgt. Damit ist ein Wechsel des Funktionszweiges des Arkustangens verbunden. Den richtigen Zweig erhält man in jedem Fall, indem man den Winkel kontinuierlich von Null bis auf seinen Endwert hochdreht. Torsionen liefern Beiträge

$$S_z \equiv \frac{k}{2} Z^2 \ , \tag{3.23}$$

wobei ein linearer Drehwinkel um die z–Achse nicht in Erscheinung tritt. Drückt man die Koordinaten in den entsprechenden Anfangs- und Endorten bzw. -impulsen aus, so ergeben sich aus diesen Ergebnissen auch die Erzeugenden (3.14) und (3.11).

3.1.3 Die linearisierte Abbildung

Die linearisierte Abbildung lautet

$$M = \frac{\partial \mathfrak{F}(q, p)}{\partial (q, p)} \ . \tag{3.24}$$

Wir fassen diese 2×2–Matrix als Funktion der Anfangswerte p und q auf und notieren ganz allgemein

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} . \tag{3.25}$$

Die Flächenerhaltung der Abbildung $\mathfrak{F}$ schlägt sich in der Eigenschaft $\det M = 1$ nieder. Die linearisierte Fassung der Abbildung über n Perioden schreibt sich mithilfe der Kettenregel als Matrixprodukt

$$M^{(n)}(q,p) = \frac{\partial \mathfrak{F}^{(n)}(q,p)}{\partial(q,p)} = M\left(\mathfrak{F}^{(n-1)}(q,p)\right) \cdot M\left(\mathfrak{F}^{(n-2)}(q,p)\right) \cdots M(q,p)\,. \tag{3.26}$$

Auch $M(q,p) = \tilde{M}\left(\tilde{\mathfrak{F}}_1(q,p)\right) \cdot \tilde{M}(q,p)$ selbst setzt sich auf ähnliche Weise aus den linearisierten Fassungen

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right|_p & \left.\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right|_q \\[2ex] \left.\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right|_p & \left.\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right|_q \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

der Teilabbildungen $\tilde{\mathfrak{F}}(\alpha, k; \beta)$ (2.26–2.28) zusammen. Wir erinnern daran, daß $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ den ersten Teilschritt bezeichnet.

In der Darstellung des Ergebnisses für den Kreisel erweist es sich als angebracht, die kartesischen Koordinaten $\mathbf{X}$ vor und $\mathbf{X}'$ nach dem Teilschritt hinzuzuziehen, um kompakte Formeln zu erhalten. Sie lauten

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{22} &= \cos\beta + \frac{XZ}{1-Z^2}\sin\beta\,, \\ \tilde{M}_{21} &= Y\sin\beta\,, \\ \tilde{M}_{12} &= kM_{22} - \frac{M_{21}}{(1-Z^2)(1-Z'^2)}\,, \\ \tilde{M}_{11} &= kM_{21} + \frac{\cos\beta - ZZ'}{1-Z'^2}\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Es fällt auf, daß die Ausdrücke explizit unabhängig von α sind, dieser Parameter also nur über die Trajektorie einfließt.

Die linearisierte Abbildung läßt sich auch durch die zweiten Ableitungen der erzeugenden Funktionen ausdrücken. Die Beziehungen lauten

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'\partial q}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'\partial p}\right)^{-1} = -\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'\partial p}\right)^{-1} \\
M_{12} &= -\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'\partial q}\right)^{-1} = -\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'\partial p}\right)^{-1} = \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'^2}\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'\partial p}\right)^{-1} - \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'\partial p} \\
M_{21} &= \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'\partial q} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'^2}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'\partial q}\right)^{-1} = \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'^2}\left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'\partial p}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'\partial p}\right)^{-1} \\
M_{22} &= -\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'\partial q}\right)^{-1} = \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'\partial p} - \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'^2}\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'\partial p}\right)^{-1} = -\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'\partial p}\right)^{-1} .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.1.4 Die Stabilität periodischer Bahnen

Für Systeme mit einem Freiheitsgrad gibt es zwei Typen isolierter periodischer Bahnen, stabile und instabile. Sie unterscheiden sich durch das Verhalten der Trajektorien, die im Phasenraum unmittelbar benachbart sind. Zur Diskussion ziehen wir die linearisierte n–Schritt–Abbildung $M^{(n)}$ zurate und führen eine klassische Stabilitätsanalyse durch. Am Phasenraumpunkt einer periodischen Bahn nennt man die linearisierte Abbildung auch die Stabilitäts- oder Monodromiematrix.

Da die Abbildung $\mathfrak{F}^{(n)}$ flächenerhaltend ist und somit $\det M^{(n)} = 1$ gilt, sind die beiden Eigenwerte von $M^{(n)}$ zueinander reziprok. Die Säkulargleichung

$$\det(M^{(n)} - \lambda) = 1 - \lambda \operatorname{tr} M^{(n)} + \lambda^2 = 0 \tag{3.30}$$

ist ein reelles Polynom zweiten Grades mit den beiden Wurzeln

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\operatorname{tr} M^{(n)} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\operatorname{tr} M^{(n)})^2 - 1}\ . \tag{3.31}$$

Das dynamische Verhalten in unmittelbarer Nachbarschaft der periodischen Bahn wird also durch den *Stabilitätsfaktor*

$$\operatorname{tr} M^{(n)} = \left.\frac{\partial q'}{\partial q}\right|_p + \left.\frac{\partial p'}{\partial p}\right|_q \tag{3.32}$$

bestimmt. Er ist invariant unter kanonischen Transformationen. Von Nutzen werden noch die Beziehungen

$$\operatorname{tr} M^{(n)} = -\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q' \partial q}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q^2}\right) \tag{3.33}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} - \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial p^2}\right) \tag{3.34}$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p' \partial p}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p'^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p^2}\right) \tag{3.35}$$

sein, in denen der Stabilitätsfaktor durch die erzeugenden Funktionen ausgedrückt wird. Damit ist die Stabilität der periodischen Bahnen mit dem Krümmungsverhalten der Funktionen $\tilde{S}(q, q; n)$, $\bar{S}(p, p; n)$ und $\hat{S}(q', p; n) - q'p$ an den Extrema (3.16, 3.18, 3.19) verknüpft. Es ergibt sich unter anderem, daß an den Minima und Maxima der noch zu besprechenden Normalformen für $\hat{S}(q', p; n) - q'p$ für den Stabilitätsfaktor $\operatorname{tr} M^{(n)} < 2$ gilt, während man an den Sätteln $\operatorname{tr} M^{(n)} > 2$ hat.

3.1.4.1 Stabile periodische Bahnen

Für $|\operatorname{tr} M^{(n)}| < 2$ sind die beiden Eigenwerte komplex und vom Betrag eins, man kann also $\lambda_\pm = \exp[i\alpha]$ schreiben und erhält dann $\operatorname{tr} M^{(n)} = 2\cos\alpha$. Auch die Eigenvektoren sind komplex und zueinander konjugiert. Die klassische Stabilitätsanalyse ergibt, daß die im Phasenraum benachbarten Trajektorien auf Ellipsen um die periodische Bahn springen, und zwar mit der stroboskopischen Frequenz α, die man auch den Stabilitätswinkel nennt. Alle Stabilitätsinseln haben daher einen stabilen periodischen Orbit in ihrem Mittelpunkt. Man spricht bei diesen Orbits auch von elliptischen periodischen Bahnen.

3.1.4.2 Instabile periodische Bahnen

Für $|\operatorname{tr} M^{(n)}| > 2$ sind die beiden Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren reell. Es gibt zwei Fälle: Die Eigenwerte einer gewöhnlichen instabilen Bahn sind positiv, $\lambda_\pm = \exp[\pm\gamma]$, und es gilt $\operatorname{tr} M^{(n)} = 2\cosh\gamma$. Bei einer invers instabilen Bahn sind sie negativ, lassen sich also in der Form $\lambda_\pm = -\exp[\pm\gamma]$ schreiben, und man hat $\operatorname{tr} M^{(n)} = -2\cosh\gamma$. Wir wählen den Instabilitätsexponenten γ positiv. In enger Umgebung der periodischen Bahn verläuft die Dynamik auf Hyperbeln. Man spricht daher auch von hyperbolischen Bahnen. In Richtung des Eigenvektors zu λ_- laufen Trajektorien auf den Orbit zu. Alle Punkte, die für $t \to +\infty$ asymptotisch den Orbit erreichen, bilden die sogenannte stabile Mannigfaltigkeit. Der genannte Eigenvektor tangiert diese Mannigfaltigkeit am Orbit. In Richtung des anderen Eigenvektors laufen die Trajek-

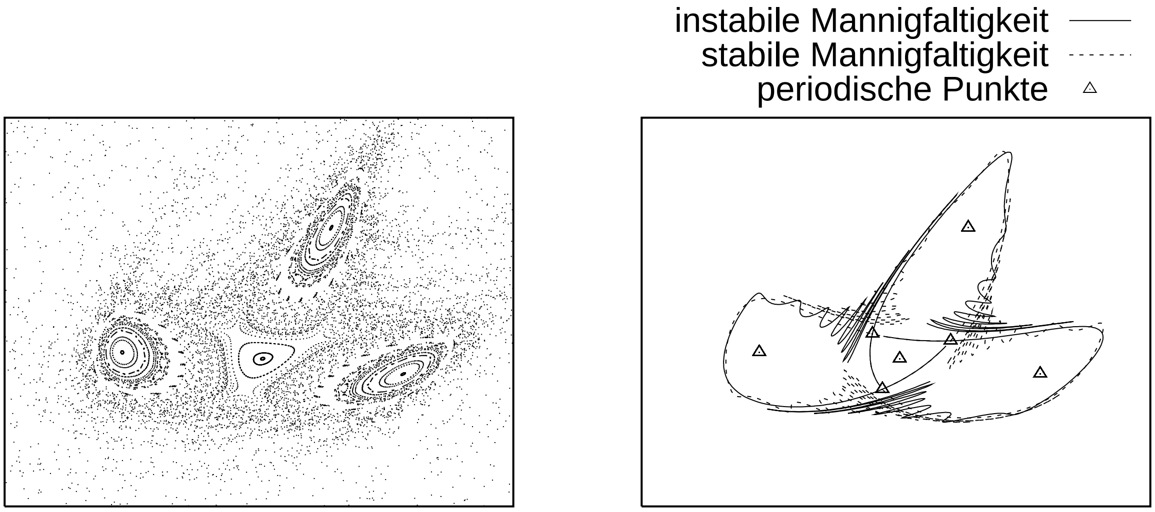


Abbildung 3: Phasenraumportrait (links) sowie stabile und instabile Mannigfaltigkeiten (rechts) in der Umgebung einer Stabilitätsinsel

torien vom Orbit weg. Er tangiert die sogenannte instabile Mannigfaltigkeit, die von jenen Punkten gebildet wird, von denen ausgehend der Orbit für $t \to -\infty$ asymptotisch erreicht wird.

Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten können sich schneiden. Startet man von einem Schnittpunkt, so erreicht man sowohl für $t \to +\infty$ als auch für $t \to -\infty$ einen Orbit. Ist dies beidemale derselbe, so spricht man von einem homoklinen Orbit, ansonsten von einem heteroklinen. Jeder weitere Punkt auf der Trajektorie ist ebenfalls ein Schnittpunkt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten. Das Verständnis der sich ergebenden komplizierten Topologie der Mannigfaltigkeiten durch Poincaré stand am Anbeginn der Erforschung chaotischer Systeme. Dies führt auf die bekannten Hufeisenstrukturen sich immer stärker windender Mannigfaltigkeiten und auf irreguläres, ausgedehntes Verhalten, also zum Auftreten chaotischer Seen in Phasenraumportraits. Man begreift den Gegensatz zu den geschachtelten Ellipsen in der Nähe stabiler Bahnen, die quasi eindimensionales dynamisches Verhalten beschreiben.

Abbildung 3 zeigt links einen Ausschnitt des Phasenraumportraits vom Kreisel für $k = 3.6$. Dort leben eine instabile und eine stabile Bahn der Länge drei und eine stabile Bahn der Länge eins. Man erkennt deutlich die Inseln um die stabilen Orbits, mit der des Periode–eins–Orbits im Zentrum. Rechts sind die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten des instabilen Periode–drei–Satelliten eingezeichnet. Auf den direkten Verbindungslinien seiner Phasenraumtrajektorie liegen beide Mannigfaltigkeiten praktisch aufeinander. Die Teilstücke, die den stabilen Satelliten umschließen, falten sich mit der Rückkehr zum instabilen Orbit. Dabei füllen sie den im Phasenraumportrait sichtbaren chaotischen Bereich allmählich aus.

3.1.5 Kaustiken und der Morseindex

Zu vorgegebenen Randwerten können keine, eine oder mehrere Trajektorien existieren, die Erzeugenden sind daher im allgemeinen mehrwertige Funktionen. Die Funktionsäste stoßen auf den sogenannten Kaustiken zusammen, die Gebiete mit verschiedener Zahl von Lösungen im Definitionsbereich der Erzeugenden voneinander abgrenzen. Dieser Begriff ist in Anlehnung an gewisse optische Phänomene gewählt, bei denen die Lösungen Lichtstrahlen sind und die Kaustiken etwa auf einem Schirm als Licht–Schattengrenzen sichtbar gemacht werden können [50,58].

Auf der Kaustik sind mehrere Lösungen entartet, die abseits davon verschieden voneinander sind oder zum Teil gar nicht existieren. Wir wollen dies zunächst anhand der Erzeugenden $\tilde{S}(q', q; t)$ diskutieren. Man kann die Situation auf der Kaustik in diesem Fall folgendermaßen beschreiben: Gegeben sei eine Trajektorie mit Randwerten q und q' sowie mit dem Anfangsimpuls p. Ändert man p infinitesimal und hält q konstant, so bleibt q' unverändert — die infinitesimal benachbarte Trajektorie erfüllt ebenfalls die Randbedingungen. Man stellt sich auch gerne ein Bündel von Trajektorien vor, die sich im Anfangsimpuls unterscheiden und im Konfigurationsraum zunächst auseinanderlaufen, schließlich aber wieder aufeinandertreffen. In diesem Sinne spricht man auch von einem Brennpunkt der Trajektorie.

Faßt man die gerade geschilderte infinitesimale Verrückungsvorschrift in eine Formel, so leitet sich daraus die Bedingung

$$\left.\frac{\partial q'}{\partial p}\right|_q = M_{12} = -\left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q' \partial q}\right)^{-1} = 0 \tag{3.36}$$

her. Hier ist M die Matrix der linearisierten Abbildung. Dies bedeutet in einer anderen Lesart, daß die natürlichen Koordinaten q und q' von $\tilde{S}$ lokal nicht unabhängig voneinander sind.

Der Impuls p' der infinitesimal benachbarten Trajektorie wird gleichfalls infinitesimal verschoben sein. Dies führt auf die äquivalente Bedingung

$$\left.\frac{\partial p'}{\partial q'}\right|_q = \frac{M_{22}}{M_{12}} = \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q'^2} = \infty \,. \tag{3.37}$$

Natürlich wollen wir fordern, daß Matrixelemente von M beschränkt bleiben, und stellen so die Gleichwertigkeit zu (3.36) sicher. Folgende Interpretation ist üblich: Für gegebenes q und t beschreibt die Funktion $\tilde{S}(q', q; t)$ eine stückweise mit q' parametrisierte Linie im Phasenraum, $(q', p' = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q'})$. (Bei mehreren Freiheitsgraden erhält man eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit.) Sie geht dynamisch durch Propagation aus der Linie $q = \text{const}$ zur Zeit Null hervor. In Abbildung 4 ist links ein typisches Teilstück der Linie gezeichnet. Sie hat dort die implizite funktionale Form $q' = p'^3 - p'$. Die Punkte, an denen die Steigung dieser Linie divergiert, bilden dann unter Projektion

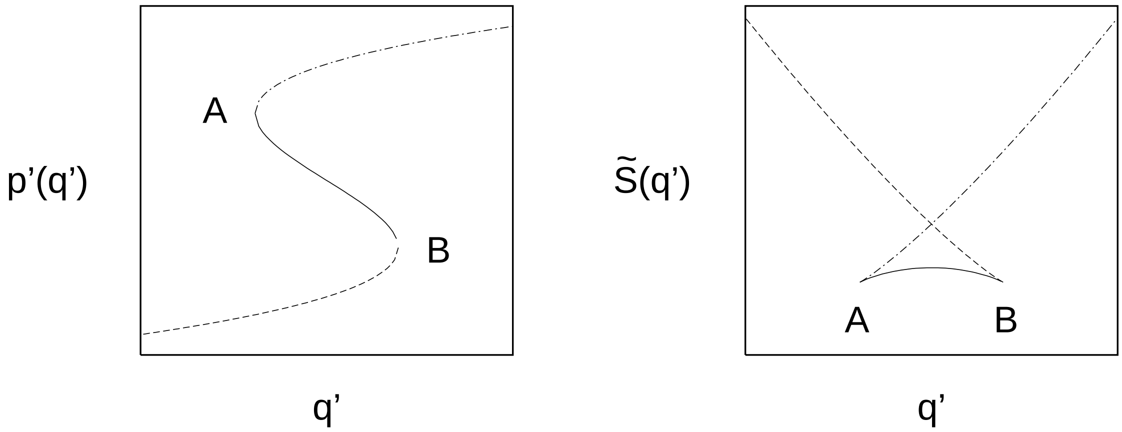


Abbildung 4: Links: Teilstück der aus $q = \text{const}$ zur Zeit Null hervorgegangenen Linie $p'(q')$ zu einer späteren Zeit t. Rechts: Die zugehörige funktionale Form der Erzeugenden. Die Umkehrpunkte der Linie links entsprechen den Falten der Erzeugenden rechts.

auf die q'–Achse und Variation der Anfangsbedingung q die Kaustik. Sie ist also eine eindimensionale Struktur im q-q'–Raum.

In der Nähe der Kaustik gilt $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q'} = p' \sim \pm q'^{1/2}$. Dies führt zu einer q'–Abhängigkeit der Erzeugenden gemäß der *Normalform* $\tilde{S}(q') \sim \pm q'^{3/2}$ für festes q und t. Die Funktionsäste der Erzeugenden stoßen, wie in Abbildung 4 rechts dargestellt, in einer „Falte" aufeinander. Betrachtet man Kurvenscharen $\tilde{S}(q')$ mit Scharparameter q oder t, so stoßen die Falten in einer anderen Art von Singularität zusammen, den sogenannten „Spitzen". Allgemein lassen sich die verschiedenen Singularitäten anhand ihrer Kodimension klassifizieren, der Differenz der Dimensionen der betrachteten Mannigfaltigkeit und der singulären Untermannigfaltigkeit. Die Falte hat Kodimension eins, die Spitze Kodimension zwei. Diese Sprechweisen stammen aus der Katastrophentheorie [50,51].

Das lokale Verhalten der Erzeugenden in der Nähe der Singularitäten der Lagrangeschen Mannigfaltigkeit kann auch in den anderen Fällen auf Normalformen zurückgeführt werden [30,57]. Verwandte Konzepte werden bei der Behandlung von Bifurkationen von Bedeutung sein.

Man führt gerne eine topologische Größe ein, die das Überschreiten von Kaustiken zählt, den *Morseindex* $\tilde{\mu}$. Dabei hält man die Anfangswerte q und p einer Trajektorie fest und betrachtet die daraus resultierende Entwicklung $q(t)$, $p(t)$. Jedesmal, wenn die Trajektorie eine Kaustik kreuzt, ändert sich der Index um ± 1, und zwar entsprechend dem Vorzeichenwechsel von M_{12}/M_{22}: Der Morseindex vergrößert sich um eins, wenn diese Größe an der Kaustik positiv wird; im umgekehrten Fall verkleinert er sich entsprechend. Keinen Beitrag erhält man jedoch, wenn sich das Vorzeichen aufgrund von $M_{22} = 0$ verändert, da dort keine Kaustik liegt. Man kann die Orientierung übrigens auch aus einer Abbildung bestimmen, die in einem infinitesimalen Schritt über die Kaustik führt. Der Morseindex verändert sich dann entsprechend der linearisierten Abbildung M des kleinen Schritts um sign M_{12}. Die Vorzeichenkonvention wird bei der

Behandlung semiklassischer Matrixelemente des Floquetoperators in Abschnitt 4.1.3 mit Sinn erfüllt werden.

Der Morseindex ist keine kanonisch invariante Größe. Auch ist die Lage der Kaustiken für jede Erzeugende verschieden. Die Bedingung ist jeweils, daß die gemischten Ableitungen divergieren,

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p}\right)^{-1} = M_{11} = 0 \tag{3.38}$$

sowie

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p' \partial p}\right)^{-1} = M_{21} = 0\,. \tag{3.39}$$

Der Morseindex $\hat{\mu}$ zu $\hat{S}$ zählt jede Kaustik entsprechend dem Vorzeichenwechsel von M_{11}/M_{21}, der Morseindex $\bar{\mu}$ zu $\bar{S}$ entsprechend dem Vorzeichenwechsel von $-M_{21}/M_{11}$. Betrachtet man wieder einen kleinen Schritt über die Kaustik, so ist als Inkrement $\operatorname{sign} M_{12}$ bzw. $-\operatorname{sign} M_{21}$ zu nehmen.

Es verbleibt, den Morseindex zu Beginn der Trajektorie festzulegen. Eine spezielle Kaustik ist der gesamte Definitionsbereich für $\tilde{S}(q', q; 0) \equiv 0$. Dies liegt daran, daß man die identische Abbildung nicht mittels der Koordinaten q und q' beschreiben kann, da sie in diesem Fall nicht unabhängig voneinander sind. Die Erzeugende $\hat{S}(q', p; 0) = q'p$ hat dagegen keine Kaustiken. Der Morseindex $\hat{\mu}$ verschwindet hier per Definition. Die anderen Indizes ergeben sich zu

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{q'} = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{M_{12}}{M_{11}} \tag{3.40}$$

und

$$\bar{\mu} = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\left.\frac{\partial p'}{\partial q'}\right|_{p} = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{M_{21}}{M_{11}}\,. \tag{3.41}$$

Diese Beziehungen sind leicht einzusehen, wenn man sich vor Augen hält, daß der rechte Term sowohl an den Kaustiken von $\hat{S}$ als auch von $\tilde{S}$ (bzw. $\bar{S}$) sein Vorzeichen wechselt. Dies geschieht so, daß die Beiträge der Kaustiken zu $\hat{\mu}$ gerade kompensiert werden: Für $M_{11} = 0$ gilt nämlich wegen $\det M = 1$ die Beziehung $M_{12} = -(M_{21})^{-1}$. Andererseits ist an den Kaustiken von $\tilde{S}$ oder $\bar{S}$ die Beziehung $M_{11} = (M_{22})^{-1}$ erfüllt, so daß dort der Vorzeichenwechsel des letzten Terms für das richtige Verhalten von $\tilde{\mu}$ und $\bar{\mu}$ sorgt.

Mit diesen Regeln ist $\hat{\mu}$ ganzzahlig; $\tilde{\mu}$ und $\bar{\mu}$ sind halbzahlig. Durch die Beziehungen (3.40) und (3.41) erhält man die Morseindizes $\tilde{\mu}$ und $\bar{\mu}$ für kleine Zeiten und kann dann die Kaustiken zählen. Sie gelten aber auch für beliebige Zeiten, so daß es reicht, einen Index und die linearisierte Abbildung zu bestimmen; die anderen Indizes sind dann festgelegt.

Wie noch zu diskutieren sein wird, ist die linearisierte Abbildung M auch in der Nähe von Bifurkationen periodischer Bahnen nahe an der Identität. Man befindet sich also bei Kaustiken von $\tilde{S}$ und $\bar{S}$. Wir werden dann erneut $\hat{S}$ den Vorzug geben.

Auch der Morseindex zusammengesetzter Abbildungen läßt sich — wie schon die Wirkung und die linearisierte Abbildung — aus den Größen der einzelnen Teilschritte bestimmen. Wir bezeichnen mit dem hochgestellten Symbol $^{(i)}$ Morseindex und linearisierte Abbildung der Teilabbildungen eines zusammengesetzten Schritts $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(2)} \circ \mathfrak{F}^{(1)}$, wobei die Abbildungen $\mathfrak{F}^{(i)}$ beliebig sein können. Der Morseindex $\bar{\mu}$ des zusammengesetzten Schritts ist dann zum Beispiel

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}^{(2)} + \bar{\mu}^{(1)} + \frac{1}{2} \operatorname{sign} \frac{M_{21}}{M_{21}^{(2)} M_{21}^{(1)}} . \tag{3.42}$$

Der dritte Term ändert sein Vorzeichen an den Kaustiken der beiden Teilschritte und an denen des zusammengesetzten Schritts. Dies geschieht so, daß die Beiträge zu $\bar{\mu}^{(i)}$ beim Überschreiten der Kaustiken in den Teilschritten gerade kompensiert werden. Betrachten wir dazu eine Kaustik im zweiten Teilschritt: In der Regel ist dort keine Kaustik des zusammengesetzten Schritts; für $M_{21}^{(2)} = 0$ gilt $M_{21} = M_{21}^{(1)} M_{11}^{(2)}$. Der dritte Term hat damit tatsächlich die benötigte Form $\frac{1}{2} \operatorname{sign} M_{11}^{(2)} / M_{21}^{(2)}$. Bei einer Kaustik des zusammengesetzten Schritts gilt weiter

$$M_{21} = M_{21}^{(1)} M_{11}^{(2)} + M_{22}^{(1)} M_{21}^{(2)} = 0 . \tag{3.43}$$

Man rechnet nun nach, daß der Vorzeichenwechsel von M_{21}/M_{11} unter Berücksichtigung dieser Beziehung tatsächlich mit dem des dritten Terms übereinstimmt. (In die Rechnung fließt erneut $\det M^{(i)} = 1$ ein.) Auf ähnliche Weise zeigt man weitere Beziehungen wie etwa die später noch benötigte Formel

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}^{(1)} + \tilde{\mu}^{(2)} - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \frac{M_{11}}{M_{11}^{(1)} M_{12}^{(2)}} . \tag{3.44}$$

(Hier gehen die beiden Teilschritte formal nicht gleichberechtigt ein.)

Mit der Beziehung (3.42) kann man eine handliche Formel für das Kreiselsystem erhalten. Betrachten wir zunächst die Abbildung $\tilde{\mathfrak{F}}$ und die ihr zugrundeliegende zeitlich kontinuierliche Dynamik mit der Hamiltonfunktion (2.21) für $t \in [0, T_2)$: Das Matrixelement $M_{21}(t) = Y \sin(\beta t / T_1)$ verrät, daß während der Drehung ($t \in [0, T_1)$) für $|\beta| < \pi$ keine Kaustik überschritten wird; dies gilt auch während der folgenden Torsion, da das Matrixelement in $t \in [T_1, T_2)$ konstant ist. Es verbleibt die triviale Kaustik bei $t = 0$. Der Morseindex für den Teilschritt lautet daher

$$\bar{\mu}(t \to 0^+) = \bar{\mu}(t = T_1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sign} \tilde{M}_{21} . \tag{3.45}$$

Nun kann man den Morseindex für einen Schritt $\mathfrak{F}^{(1)} = \tilde{\mathfrak{F}}_2 \circ \tilde{\mathfrak{F}}_1$ berechnen und weiter den gesamten Morseindex für $\mathfrak{F}^{(n)}$ zusammensetzen. Um das Ergebnis zu formulieren, bezeichnen wir die Koordinaten entlang der Trajektorie mit $(q_i, p_i) = \mathfrak{F}^{(i)}(q_0, p_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Für periodische Bahnen gilt $q_0 = q_n$, $p_0 = p_n$. Weiter führen wir die „Zwischenkoordinaten" $(Q_i, P_i) \equiv \tilde{\mathfrak{F}}_1(q_i, p_i)$ ein. Dann erhält man

$$
\begin{aligned}
2\bar{\mu} \;&=\; -\sum_{i=0}^{n-1}\left(\operatorname{sign}\tilde{M}_{21}(q_i,p_i) + \operatorname{sign}\tilde{M}_{21}(Q_i,P_i) - \operatorname{sign}\frac{M_{21}^{(1)}(q_i,p_i)}{\tilde{M}_{21}(Q_i,P_i)\tilde{M}_{21}(q_i,p_i)}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{sign}\frac{M_{21}^{(i+1)}(q_0,p_0)}{M_{21}^{(1)}(q_i,p_i)M_{21}^{(i)}(q_0,p_0)}\;. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

3.1.6 Der Maslovindex

Der Maslovindex ist eine kanonisch invariante Größe topologischer Natur und steht im Zusammenhang mit sogenannten Windungszahlen [59–67,7,10]. Dazu denkt man sich einen Tangentenvektor, der entlang einer periodischen Bahn mitgeführt wird und nach einem Umlauf wieder die anfängliche Orientierung haben soll. Man erhält dadurch eine Trajektorie im Tangentialraum des Phasenraums. Wir betrachten nur die Projektion senkrecht zur Trajektorie. Identifiziert man die Tangentialräume entlang der Trajektorie durch eine geeignete Vorschrift des Paralleltransports, so dreht sich der Vektor im Kreise. Die Zahl der Umdrehungen ist die Windungszahl. Im Falle einer instabilen Bahn ist der Maslovindex das Doppelte der Windungszahl der Tangente an die stabile oder instabile Mannigfaltigkeit [68]. (Beide Windungszahlen sind gleich.) Er wächst demnach linear mit der m–ten Wiederkehr des Orbits.

Bei stabilen Bahnen ist der Maslovindex mit dem Stabilitätswinkel α verknüpft. Der genaue Zusammenhang ist recht kompliziert, insbesondere auch sein Verhalten für die m–te Wiederkehr. Wir verzichten auf die Darstellung von Details (eine semiklassische Interpretation findet sich etwa in [10]). Der Maslovindex läßt sich nämlich bequem aus dem Morseindex und der Stabilitätsmatrix berechnen. Wir geben hier eine Vorschrift an, die unabhängig von der Natur der Bahn und für beliebige Wiederkehr gilt. Sie lautet unter Benutzung von (3.29)

$$
\begin{aligned}
\nu \;&=\; \tilde{\mu} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{(2-\operatorname{tr}M)}{M_{12}} = \tilde{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{d^2\tilde{S}(q,q)}{dq^2} \\
&=\; \hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}G \\
&=\; \bar{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{(2-\operatorname{tr}M)}{M_{21}} = \bar{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\frac{d^2\bar{S}(p,p)}{dp^2}\;. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

Hier ist G die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'^2} & 1 - \dfrac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} \\ & \\ 1 - \dfrac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} & \dfrac{\partial^2 \hat{S}}{\partial p^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{11}} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{11} - 1 \\ & \\ M_{11} - 1 & -M_{12} \end{pmatrix} , \qquad (3.48)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} G &= \operatorname{sign} \frac{2 - \operatorname{tr} M}{M_{21}} + \operatorname{sign} \frac{M_{21}}{M_{11}} \\ &= -\operatorname{sign} \frac{2 - \operatorname{tr} M}{M_{12}} - \operatorname{sign} \frac{M_{12}}{M_{11}} \end{aligned} \qquad (3.49)$$

bezeichnet die Differenz der Zahl ihrer positiven und negativen Eigenwerte. Diese Beziehungen ergeben sich aus der Kombination der Gleichungen (3.40, 3.41) mit (3.47).

Den Ausdrücken sieht man zwar nicht an, daß sie kanonisch invariant sind, sie sind jedoch von großem praktischen Nutzen.

Für den Kreisel bestimmt man den Maslovindex etwa aus dem Morseindex $\bar{\mu}$. Dann erhält man mit dem Ergebnis und der Notation des vorigen Abschnitts

$$\begin{aligned} 2\nu &= -\sum_{i=0}^{n-1} \left(\operatorname{sign} \tilde{M}_{21}(q_i, p_i) + \operatorname{sign} \tilde{M}_{21}(Q_i, P_i) - \operatorname{sign} \frac{M_{21}^{(1)}(q_i, p_i)}{\tilde{M}_{21}(Q_i, P_i) \tilde{M}_{21}(q_i, p_i)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sign} \frac{M_{21}^{(i+1)}(q_0, p_0)}{M_{21}^{(1)}(q_i, p_i) M_{21}^{(i)}(q_0, p_0)} - \operatorname{sign} \frac{2 - \operatorname{tr} M^{(n)}}{M_{21}^{(n)}(q_0, p_0)} . \end{aligned} \qquad (3.50)$$

Sind alle Matrixelemente M_{21} positiv, so ist $\nu = -\frac{1}{2}[1 + \operatorname{sign}(2 - \operatorname{tr} M^{(n)})]$. Jedes Element geht in zwei Terme der Form $\frac{1}{2} \operatorname{sign} x$ ein. Ändert man das Vorzeichen eines beliebigen Matrixelements, so ändert sich ν um zwei. Deshalb ist der Maslovindex von instabilen Bahnen mit $\operatorname{tr} M > 2$ eine gerade und der von stabilen und invers instabilen Bahnen eine ungerade Zahl.

3.2 Periodische Bahnen bei Integrabilität

Die Zahl der Fixpunktgleichungen in (3.1) ist identisch mit der Zahl der Unbekannten. Im allgemeinen sind Orbits also isoliert. Gibt es jedoch Erhaltungsgrößen, so findet man im allgemeinen Familien von Lösungen: Nach dem Noetherschen Theorem erzeugen die Erhaltungsgrößen eine kontinuierliche Klasse kanonischer Transformationen, die das Systemverhalten nicht berühren; mittels dieser Transformationen erhält man aus einer Lösung viele weitere. Dies hat Konsequenzen insbesondere für integrable Systeme, bei denen es genausoviele unabhängige Erhaltungsgrößen $E_i(q,p)$ wie Freiheitsgrade f gibt, wobei ihre Poissonklammern sowohl mit der Hamiltonfunktion als auch untereinander alle verschwinden, $\{H, E_i\} = \{E_i, E_j\} = 0$. Die Phasenraumtrajektorien sind dann auf f–dimensionale Mannigfaltigkeiten eingeschränkt, die durch einen geeigneten Satz von f Gleichungen $I_i = \text{const}$ beschrieben werden können. Die Mannigfaltigkeiten haben in der Regel die Topologie eines Torus und können dann mit 2π–periodischen Winkeln φ_i parametrisiert werden. Auf jedem dieser invarianten Tori ist die Dynamik quasiperiodisch, $\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i(\mathbf{I})t$. Die Frequenzen ω_i hängen im allgemeinen von den Konstanten I_i ab, sind also von Torus zu Torus verschieden. Sind die Frequenzen kommensurabel, so ist der gesamte Torus von periodischen Bahnen ausgefüllt, die damit eine f–dimensionale Familie bilden. Einen solchen Torus nennt man einen rationalen invarianten Torus.

Eine spezielle Symmetrie ist die Energieerhaltung autonomer Systeme. Alle autonomen Systeme mit einem Freiheitsgrad sind daher integrabel, mit der Hamiltonfunktion $H(q,p)$ als der benötigten Konstanten der Bewegung. Die oben erwähnten Eigenschaften wollen wir nun für diesen speziellen Fall konkretisieren. So wollen wir die kanonische Transformation $(q,p) \to (\varphi, I)$ finden, nach der die Hamiltonfunktion nur vom neuen Impuls in Gestalt der *Wirkungsvariablen* I abhängt, während die sogenannte *Winkelvariable* φ zyklisch ist. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind dann trivial: Die Wirkung I bleibt zeitlich konstant, während der Winkel mit gleichfalls konstanter, durch die Wirkung festgelegter Rate

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} \equiv \omega(I) \tag{3.51}$$

anwächst. Ist das zugängliche Phasenraumvolumen beschränkt (etwa aufgrund von Energieerhaltung in einem Potentialtopf), so sind es auch die Koordinaten $p(I,\varphi)$ und $q(I,\varphi)$. Der Winkel φ wächst mit der Zeit jedoch unbegrenzt an, so daß q und p periodisch in φ sein müssen, solange man nicht auf einer Separatrix sitzt, d. h. solange man nicht asymptotisch für betragsmäßig große Zeiten in einen instabilen Fixpunkt hineinläuft. Als Periode kann man 2π wählen. Wie im allgemeinen f–dimensionalen Fall hat die Linie konstanter Energie also die Topologie eines (nun eindimensionalen) Torus. Alle Trajektorien folgen diesen Linien und sind zeitlich periodisch. Wir bezeichnen die Umlaufdauer mit $\mathcal{T}$. Sie ist in der Regel von Torus zu Torus verschieden und kann als Funktion der Energie aufgefaßt werden.

Die Torusfrequenz $\omega(I)$ wird bei der Diskussion der periodischen Bahnen und ihrer Bifurkationen von zentraler Bedeutung sein.

Die Wirkungsvariable $I = W/(2\pi)$ ist durch die verkürzte Wirkung

$$W(E) = \oint p\,dq = S + E\mathcal{T} \tag{3.52}$$

gegeben, wobei das Integral entlang der erwähnten geschlossenen Linie führt. Hier ist S der Wert der üblichen Hamiltonschen Wirkungsfunktion (3.4) für einen Umlauf der Trajektorie. Die Beziehung zu I folgt aus $\int_0^{\mathfrak{T}} I\dot{\varphi}\,dt = \mathfrak{T}\omega I = 2\pi I$ und der Invarianz des Flächeninhalts W des durch den Torus eingeschlossenen Gebiets unter kanonischen Transformationen. Es gilt weiter

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \omega = \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \tag{3.53}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Beziehung $\frac{\partial W}{\partial E} = \mathfrak{T}$.

In einer stroboskopischen Betrachtungsweise mit Beobachtungsperiode T gelangt man im Falle eines integrablen Systems nach n stroboskopischen Schritten zum Ausgangspunkt zurück, falls die Frequenz (3.51) des Torus, auf dem man startet, der Beziehung $nT = m\mathfrak{T}$ oder auch

$$\omega n = \omega_0 m \tag{3.54}$$

genügt. Dabei haben wir die Bezeichnung $\omega_0 = 2\pi/T$ eingeführt. Der gesamte invariante Torus ist dann durch periodische Bahnen der Länge n ausgefüllt. Setzen wir für die stroboskopische Periode $T = 1$, so muß $\omega = 2\pi\frac{m}{n}$ ein rationales Vielfaches von 2π sein. Man spricht auch in diesem Fall von einem rationalen invarianten Torus.

Aus (3.52) folgt

$$2\pi I = S + H(I)\mathfrak{T} \tag{3.55}$$

und daraus die Erzeugende

$$\tilde{S}(\varphi', \varphi; t) = \frac{t}{\mathfrak{T}} S = \omega(I) I t - H(I) t\ . \tag{3.56}$$

Nach einer Legendretransformation erhält man die Erzeugende $\hat{S}$ in gemischten Variablen

$$\hat{S}(\varphi', I; nT) = I(\varphi' + 2\pi m) - nTH(I)\ . \tag{3.57}$$

Sie beschreibt tatsächlich die richtige stroboskopische Zeitentwicklung,

$$I' = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \varphi'} = I\ , \qquad \varphi = \frac{\partial \hat{S}}{\partial I} = \varphi' - nT\omega + 2\pi m\ . \tag{3.58}$$

Hier ist m so festgelegt, daß φ' wie φ in $[0, 2\pi)$ verbleibt.

Der Stabilitätsfaktor für einen geschlossenen Umlauf ist $\operatorname{tr} M = 2$. Wir wollen nun noch den Morseindex bestimmen. Parametrisiert man den Torus in kartesischen Koordinaten $q = \sqrt{2I}\sin\varphi$, $p = \sqrt{2I}\cos\varphi$, so ist auf dem Torus $H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$. Der harmonische Oszillator hat Kaustiken von $\hat{S}$ zu den Zeiten $\cos(\omega t) = 0$, also zwei je

Umlauf. Jede trägt mit sign ω zum Morseindex bei. Die Zahl der Umläufe ist gerade durch $|m|$ gegeben, und so ist $\hat{\mu} = 2m$. (Dies gilt wohl unter der Voraussetzung, daß man den Torus wie beim harmonischen Oszillator auf einen Punkt zusammenziehen kann. Ansonsten sind Beiträge geometrischer Phasen denkbar [69,70].)

Im integrablen Fall $k = 0$ unserer Kreiselvariante ist die Umlauffrequenz ω für jeden Torus gleich dem Drehwinkel Ω (2.31) und für die gewählten Parameter α_i, β_i kein rationales Vielfaches von 2π. Für die beiden Fixpunkte $\pm\tilde{\mathbf{X}}$ ist die Frequenz jedoch nicht definiert, da sich der Torus dort auf einen Punkt zusammengezogen hat — diese entarteten Tori sind die einzigen periodischen Bahnen des integrablen Kreisels. Mit den Eigenschaften dieser Bahnen beschäftigen wir uns eingehend in Abschnitt 5.4.1.

3.3 Das Auseinanderbrechen von Tori

Nichtautonome Systeme sind in der Regel nicht integrabel, selbst wenn sie nur einen Freiheitsgrad besitzen. Ein reguläres Systemverhalten wie das gerade geschilderte wird man dann nicht mehr vorfinden. Stört man ein integrables System, so verschwinden in der Regel die Familien periodischer Bahnen auf den rationalen Tori und werden für eine zeitlich periodische Störung in der stroboskopischen Abbildung durch Ketten stabiler und instabiler isolierter periodischer Bahnen abgelöst. Dies ist die zentrale Aussage des Poincaré–Birkhoff–Theorems [32, Kapitel 3.2b]. Es beruht auf rein geometrischen Überlegungen und stellt kein Kriterium bereit, wieviele periodische Bahnen dabei im Spiel sind. Einen Einblick in den genauen Mechanismus erhält man mittels der klassischen Störungstheorie, in die wir hier, auf unsere speziellen Bedürfnisse zugeschnitten, kurz einführen wollen. Das Vorgehen ist auch für das Verständnis von Bifurkationen von grundlegender Bedeutung; insbesondere gilt dies für das Auftreten sogenannter Resonanzen und das Konzept der Normalform, aus der die grundlegenden Eigenschaften periodischer Bahnen abgelesen werden können.

Wir starten mit einem autonomen System und schalten eine zeitlich periodische Störung der Stärke ε ein. In Winkel–Wirkungskoordinaten J, Θ liest sich das wie folgt,

$$H = H_0(J) + \varepsilon V(J, \Theta, t) \,. \tag{3.59}$$

Es gelte dabei $V(t+T) = V(t)$. Wir bezeichnen erneut $\omega_0 = 2\pi/T$. Mittels einer kanonischen Transformation zu neuen Koordinaten I, Φ soll nun die Störung — so weit möglich — wegtransformiert werden. Dazu führt man zunächst eine Fourierentwicklung in den beiden periodischen Größen t und Θ durch,

$$V(J, \Theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{nm}(J) \cos(n\Theta - m\omega_0 t + \Theta_{nm}) \,. \tag{3.60}$$

Für die Erzeugende $G(I,\Theta)$ der Transformation macht man den Ansatz

$$G(I,\Theta) = I\Theta + \varepsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} G_{nm}(I) \sin(n\Theta - m\omega_0 t + \Theta_{nm}) \; . \tag{3.61}$$

Die kanonische Transformation wird durch

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \Phi \; , \quad \frac{\partial G}{\partial \Theta} = J \; , \quad H' = H - \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.62}$$

beschrieben. Löst man die beiden ersten Gleichungen in führender Ordnung von ε nach den alten Koordinaten J und Θ auf und setzt diese in den Ausdruck für die neue Hamiltonfunktion ein, so erhält man bis zur ersten Ordnung in ε

$$H' = H_0 + \varepsilon \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [(\omega n - \omega_0 m) G_{nm} + V_{nm}] \cos(n\Phi - m\omega_0 t + \Theta_{nm}) \; . \tag{3.63}$$

Hier ist $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$ die schon diskutierte Torusfrequenz (3.51). Wählt man nun

$$G_{nm} = \frac{V_{nm}}{\omega_0 m - \omega n} \; , \tag{3.64}$$

so verbleiben nur noch Terme der Ordnung ε^2. Dies geht jedoch nur, solange nicht die *Resonanzbedingung*

$$\omega n = \omega_0 m \tag{3.65}$$

erfüllt ist. Folglich verbleibt zum Beispiel der Term mit $m = n = 0$. Er hängt nur von I ab und stört nicht die Integrabilität; wir können ihn daher in H_0 vereinnahmt denken. Aber auch auf einem rationalen Torus bei $I \equiv I_0$ ist die Resonanzbedingung wegen (3.54) erfüllt. Dies führt auf die von Poincaré und Birkhoff beschriebene Weise zu seinem Aufbrechen. Die störungstheoretische Behandlung ist nun in der Lage, eine Aussage über die Zahl der dabei beteiligten periodischen Bahnen zu liefern: Beschränkt man sich auf die engste Nachbarschaft eines rationalen Torus, so hängt das dort beobachtete Verhalten qualitativ nur davon ab, welche resonante Harmonische der Störung dominiert. Wir besprechen die beiden einfachsten Fälle. Beim einfachen Aufbrechen treten zwei Bahnen die Nachfolge des rationalen Torus an, beim doppelten Aufbrechen sind es vier.

3.3.1 Einfach gebrochene Tori

In vielen Fällen dominiert in der Nähe des betrachteten Torus mit Frequenz $\omega = \frac{m}{n}\omega_0$ und teilerfremdem $\frac{m}{n}$ der resonante Störterm $\cos(n\Phi - m\omega_0 t)$. Terme der Form $\cos(kn\Phi - km\omega_0 t)$ mit ganzzahligem $k > 1$ sind also vernachlässigbar. (Der Bedeutung des Terms mit $k = 2$ werden wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden.) Es genügt in diesem Fall, eine Hamiltonfunktion der Form

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I) \cos(n\Phi - m\omega_0 t) \tag{3.66}$$

zu betrachten. In einem rotierenden Koordinatensystem $\psi = \Phi - \frac{m}{n}\omega_0 t = \Phi - \omega(I_0)t$ lautet sie

$$H = H_0(I) - \omega(I_0)I + \varepsilon V(I) \cos(n\psi) \; . \tag{3.67}$$

Dies ist ein autonomes System; in der Nähe des Torus ist das System daher quasi integrabel. Man kann nun die periodischen Bahnen der stroboskopischen Abbildung bestimmen. Sie liegen bei

$$\psi^{(l)} = \frac{l}{n}\pi \; , \quad l = 0, 1, \ldots, 2n-1 \; , \tag{3.68}$$

$$\omega(I^{(l)}) - \omega(I_0) + \varepsilon V'(I^{(l)})\sigma^{(l)} = 0 \; , \qquad \text{mit} \quad \sigma^{(l)} = \cos(l\pi) = (-1)^l \; . \tag{3.69}$$

Der Strich an V (und weiter unten auch an ω) bezeichnet die Ableitung nach I. Durch Rücktransformation auf das ruhende System erkennt man, daß in der stroboskopischen Betrachtungsweise die jeweils n Punkte zu geradem oder ungeradem l zu einer Bahn der primitiven Länge $n^{(0)} = n$ gehören: In jedem Abbildungsschritt wird der l–te Punkt in den $2m + l$–ten (modulo $2n$) überführt. Unter Berücksichtigung der Teilerfremdheit von m und n kommt man erst nach n Schritten wieder zum Ausgangspunkt zurück. Die beiden Bahnen kann man mittels des Werts der Größe $\sigma \equiv \sigma^{(l)} = \pm 1$ voneinander unterscheiden. Linearisiert man (3.69) in

$$\Delta \equiv I - I_0 \; , \tag{3.70}$$

so liegen die Wirkungsvariablen der periodischen Bahnen bei $I_\sigma = I_0 + \Delta_\sigma$ mit

$$\Delta_\sigma = -\sigma\varepsilon \frac{V'(I_0)}{\omega'(I_0)} \; . \tag{3.71}$$

Linearisiert man die Bewegungsgleichungen um eine periodische Bahn herum in $\tilde{\Delta} = I - I_\sigma$ und $\delta\psi = \psi - \psi^{(l)}$ und behält dabei nur die führende Ordnung in ε,

$$\begin{aligned} \delta\dot{\psi} &\approx \omega'(I_0)\tilde{\Delta} \; , \\ \dot{\tilde{\Delta}} &\approx \sigma\varepsilon V n^2 \delta\psi \; , \end{aligned} \tag{3.72}$$

so folgt der Stabilitätsfaktor

$$\operatorname{tr} M_\sigma^{(n)} = 2 + \sigma\varepsilon\omega'(I_0)V(I_0)n^4T^2 \; . \tag{3.73}$$

Eine weitere Vereinfachung gelingt, indem man von vornherein um den Torus herum in Δ entwickelt und nur noch

$$H = \frac{1}{2}\omega'(I_0)\Delta^2 + \varepsilon V(I_0)\cos(n\psi) \tag{3.74}$$

betrachtet. Dies ist die *Normalform* zur Beschreibung des einfachen Aufbrechens rationaler Tori und hat die Gestalt der Hamiltonfunktion eines Pendels. Auch für die Erzeugende $\hat{S}(\Delta, \psi'; nT)$ in Winkel–Wirkungsvariablen kann man eine Normalform angeben. In den Ordnungen von ε und Δ wollen wir so weit gehen, daß sich aus der Normalform der Stabilitätsfaktor (3.73) reproduzieren läßt. Dazu lösen wir die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\psi}(t) \;=\; \omega'(I_0)\Delta(t)\,, \tag{3.75}$$

$$\dot{\Delta}(t) \;=\; n\varepsilon V(I_0)\sin[n\psi(t)] \tag{3.76}$$

iterativ und beginnen mit

$$\psi(t) = \psi(0) + \omega'(I_0)\Delta(0)t\,. \tag{3.77}$$

Dies setzen wir in (3.76) ein und integrieren auf. Das Ergebnis $\Delta(t)$ setzen wir in (3.75) ein und erhalten ein verbessertes $\psi(t)$. Diese beiden Iterationsschritte reichen für unsere Bedürfnisse aus. Im Endergebnis kann man nun geschickt in der Anfangsbedingung $\Delta \equiv \Delta(0)$ entwickeln und erhält mit $\psi \equiv \psi(0)$

$$\psi' \equiv \psi(nT) \;=\; \psi + n\omega' T\Delta + \frac{1}{2}\varepsilon V n^3 \omega' T^2 \sin\left(n\psi + \frac{1}{2}n^2\omega' T\Delta\right)\,, \tag{3.78}$$

$$\Delta' \equiv \Delta(nT) \;=\; \Delta + \varepsilon V n^2 T \sin\left(n\psi + \frac{1}{2}n^2\omega' T\Delta\right)\,. \tag{3.79}$$

Im Argument des Sinus haben wir Δ beibehalten und nicht weiterentwickelt. Mit diesem Trick erreicht man, daß in der vorliegenden Form exakt $\det M^{(n)} = 1$ gilt und man auf dem Weg zur Erzeugenden keine weiteren Näherungen mehr benötigt. Verschiebt man die ψ–Koordinate in einer kanonischen Transformation,

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi - \frac{1}{2}n\omega' T\Delta\,, \\ \varphi' &= \psi' - \frac{1}{2}n\omega' T\Delta'\,, \end{aligned} \tag{3.80}$$

so kann man (3.78, 3.79) nach

$$\Delta'(\Delta, \varphi') = \Delta + \varepsilon V n^2 T \sin(n\varphi') \tag{3.81}$$

und

$$\varphi(\Delta,\varphi') = \varphi' - n\omega' T\Delta \tag{3.82}$$

auflösen. Aus den Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \Delta} = \varphi\ , \qquad \frac{\partial \hat{S}}{\partial \varphi'} = \Delta' \tag{3.83}$$

ergibt sich die Erzeugende

$$\hat{S}(\Delta,\varphi';n) = S_0 + \varphi'\Delta - nTH(\Delta,\varphi') = S_0 + \varphi'\Delta - a\Delta^2 - \varepsilon b\cos(n\varphi')\ . \tag{3.84}$$

Die Koeffizienten

$$a = \frac{1}{2}\omega'(I_0)nT\ , \qquad b = V(I_0)nT \tag{3.85}$$

hängen in einfacher Weise mit denen in der Hamiltonfunktion zusammen. In dieser Beschreibungsweise liegen die beiden Bahnen erneut bei $\varphi = \frac{l}{n}\pi$, haben aber identische Wirkungsvariablen $I_\sigma = I_0$. Ihre Wirkung ist

$$S_\sigma = S_0 - \sigma\varepsilon b\ . \tag{3.86}$$

Die Stabilitätsfaktoren ergeben sich aus (3.34) zu

$$\mathrm{tr}\, M_\sigma^{(n)} = 2 + 2\sigma\varepsilon n^2 ab\ , \tag{3.87}$$

in Übereinstimmung mit (3.73). Damit ist die eine Bahn stabil, die andere instabil. Weiter gilt in der angegebenen Ordnung eine feste Relation zwischen den beiden Stabilitätsfaktoren,

$$\mathrm{tr}\, M_+^{(n)} + \mathrm{tr}\, M_-^{(n)} = 4 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\ . \tag{3.88}$$

Auf solche Beziehungen werden wir in der Folge noch einige Male treffen. Sie sind nicht streng gültig, sondern werden mit wachsendem ε immer stärker verletzt. Man kann sich von ihnen lösen, indem man Terme höherer Ordnung in der Hamiltonfunktion bzw. der Erzeugenden beibehält und sich so genügend freie Koeffizienten für unabhängige Wirkungen und Stabilitätsfaktoren verschafft. Darauf werden wir in Abschnitt 3.4.3 am Beispiel der Tangentenbifurkation näher eingehen.

Die Morseindizes der beiden eng benachbarten Trajektorien sind gleich, $\hat{\mu}_\sigma \equiv \hat{\mu}$. Der Maslovindex bestimmt sich aus den zweiten Ableitungen der Wirkung. Dies wird durch die Gleichungen (3.47) und (3.49) beschrieben. Man erhält

$$\nu_\sigma = \hat{\mu} + \frac{1}{2}(\mathrm{sign}\, a - \sigma\,\mathrm{sign}\,\varepsilon b) \tag{3.89}$$

und die Beziehung

$$\nu_\sigma - \nu_{-\sigma} = \operatorname{sign}(S_\sigma - S_{-\sigma}) \ . \tag{3.90}$$

3.3.2 Doppelt gebrochene Tori

Die Situation wird komplizierter, wenn der Störterm $\cos(2n\Phi - 2m\omega_0 t)$ nicht vernachlässigt werden kann. Um das Geschehen zu analysieren, benutzen wir sogleich die Erzeugende der stroboskopischen Abbildung und betrachten die Normalform

$$\hat{S}(\varphi', \Delta; n) = S_0 + \varphi'\Delta - a\Delta^2 - \varepsilon[b\cos(n\varphi') + c\cos(2n\varphi' + \varphi_0)] \ . \tag{3.91}$$

Die periodischen Bahnen genügen den Fixpunktgleichungen

$$\Delta = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \varphi'} = \Delta + \varepsilon n[b\sin(n\varphi') + 2c\sin(2n\varphi' + \varphi_0)] \ , \tag{3.92}$$

$$\varphi' = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \Delta} = \varphi' - 2a\Delta \ . \tag{3.93}$$

Daraus folgt $\Delta = 0$ und

$$b\sin(n\varphi') + 2c\sin(2n\varphi' + \varphi_0) = 0 \ . \tag{3.94}$$

Es hängt nun von den Parametern ab, ob $2n$ oder $4n$ Lösungen existieren. Den ersten Fall haben wir bereits im vorigen Abschnitt abgehandelt. Treten $4n$ Lösungen auf, so gehören sie zu vier periodischen Bahnen der primitiven Länge $n^{(0)} = n$. Wir unterscheiden sie mit dem Index $i = 1, 2, 3, 4$ und greifen uns für jeden Orbit einen Punkt bei φ_i heraus. Die weiteren Punkte entlang der Trajektorie liegen bei $\varphi_i + 2\pi\frac{l}{n}$ mit $l = 1, \ldots n-1$. Die Wirkungen sind

$$S_i = S_0 - \varepsilon[b\cos(n\varphi_i) + c\cos(2n\varphi_i + \varphi_0)] \ . \tag{3.95}$$

Die Bahnen haben die Stabilitätsfaktoren

$$\operatorname{tr} M_i = 2 + 2a\varepsilon n^2 \left[b\cos(n\varphi_i) + 4c\cos(2n\varphi_i + \varphi_0)\right] \ . \tag{3.96}$$

Zwei Bahnen sind stabil, die anderen beiden instabil. Die vier Koeffizienten εb, εc, φ_0 und S_0 lassen sich aus den vier Wirkungen der Bahnen bestimmen. Die Kenntnis eines Stabilitätsfaktors legt den verbleibenden Koeffizienten a in der Normalform fest, so daß die anderen Stabilitätsfaktoren nicht unabhängig sind; ihre wechselseitigen Beziehungen lassen sich allerdings nicht in einer solch einfachen Form wie in (3.88) formulieren.

Für den Maslovindex erhält man

$$\begin{aligned} \nu_i &= \hat{\mu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,a - \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left[\varepsilon b \cos(n\varphi_i) + 4\varepsilon c \cos(2n\varphi_i + \varphi_0)\right] \\ &= \begin{cases} \hat{\mu} & \text{instabile Orbits} \\ \hat{\mu} + \mathrm{sign}\,a & \text{stabile Orbits} \end{cases} . \end{aligned} \tag{3.97}$$

3.4 Bifurkationen im gemischten Phasenraum

Der Zusammenhang zwischen den stabilen periodischen Bahnen und den Stabilitätsinseln sowie den instabilen Bahnen und den irregulären Bereichen im Phasenraum (vgl. Abschnitt 3.1.4) läßt die Bedeutung der periodischen Bahnen für die Natur des dynamischen Verhaltens eines Systems erkennen. In Abbildung 2 gibt es etwa für $k = 2.5$ unten links einen regulären Bereich, der im Vergleich zu den Abbildungen mit kleinerem k neu hinzugekommen ist. Er rührt von einem neuen stabilen Orbit her, der zusammen mit einem instabilen Partner bei $k = 2.45\ldots$ entstanden ist. Bei $k = 5$ ist die Insel bereits wieder verschwunden.

Eine besondere Rolle für den Übergang regulär/irregulär spielen alle Ereignisse, in denen periodische Bahnen neu entstehen, verschwinden, ihre Stabilität wechseln oder sich ihre Konfiguration in anderer Weise qualitativ ändert. All die genannten Ereignisse sind ausnahmslos mit Bifurkationen verknüpft. Mit diesem Wort kennzeichnen wir die Situationen, in denen in Abhängigkeit von einem Kontrollparameter periodische Bahnen im Phasenraum aufeinandertreffen; in unmittelbarer Nachbarschaft der Bifurkation liegen die beteiligten Bahnen eng beieinander.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, welche Typen von Bifurkationen wir für unseren Kreisel zu erwarten haben. Es spielt dabei eine Rolle, daß er keine diskreten Symmetrien besitzt und nicht zeitumkehrinvariant ist. Die typischerweise auftretenden Bifurkationen hängen auch von der Zahl der Parameter ab, mit denen man das System steuert. Die Zahl der Parameter, die man im allgemeinen kontrollieren muß, um einen Bifurkationstyp einzustellen, nennt man seine Kodimension. Dies entspricht der Sprechweise für Kaustiken aus Abschnitt 3.1.5. Da wir nur die Kopplungskonstante k verändern, interessieren wir uns zunächst einmal für Bifurkationen der Kodimension eins. Für Systeme ohne jede Symmetrie wurden sie von Meyer und Bruno bestimmt [30,31,33–35]. Bei diskreten Symmetrien und bei Zeitumkehrinvarianz treten die in [71–75] beschriebenen zusätzlichen Fälle auf, auf die wir aber nicht näher eingehen werden.

3.4.1 Normalformen

Um die verschiedenen Bifurkationstypen zu identifizieren, untersuchen wir die allgemeine lokale Form der Hamiltonfunktion des zugrundeliegenden zeitlich kontinuierlichen Systems in der Umgebung einer periodischen Bahn der primitiven Periode n_1 und die daraus resultierende stroboskopische Zeitentwicklung. Wir setzen die Beobachtungsperiode $T = 1$. Als Technik wählen wir wie in Abschnitt 3.3 die Störungstheorie. Der führende Term einer Entwicklung im Abstand zur Bahn ist durch die linearisierte Abbildung bestimmt. So hat man in der Umgebung einer instabilen Bahn mit $\operatorname{tr} M^{(n_1)} = 2\cosh(\lambda_1)$

$$H_0 = \frac{\lambda_1}{n_1} pq \; , \tag{3.98}$$

während eine stabiler Orbit mit $\operatorname{tr} M^{(n_1)} = 2\cos\alpha_1$ durch

$$H_0 = \frac{\alpha_1}{2n_1}(p^2 + q^2) \tag{3.99}$$

beschrieben wird. Zu diesen autonomen Ausdrücken gelangt man, indem man sich auf die periodische Bahn setzt und nur die effektive Dynamik zu den Wiederkehrzeiten betrachtet. Die periodische Bahn erscheint dann als Fixpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. (Invers instabile Bahnen lassen sich mit einer transversalen Drehung des Koordinatensystems in jedem Umlauf um π wie gewöhnliche instabile Bahnen behandeln). In erster Näherung ist das System in der Umgebung der Bahn integrabel. Entfernt man sich vom Fixpunkt, so kommen zeitlich periodische Terme höherer Ordnungen in p und q hinzu, die man störungstheoretisch behandeln kann. Im Falle einer instabilen Bahn treten dabei keine Resonanzen auf. Sie ist ja auch nicht von Tori umgeben, wie wir bereits in der Stabilitätsanalyse festgestellt haben. Für einen stabilen Fixpunkt sind die Winkel–Wirkungsvariablen des ungestörten Systems (3.99) die *kanonischen Polarkoordinaten* I, Φ mit

$$q = \sqrt{2I}\sin\Phi \, , \qquad p = \sqrt{2I}\cos\Phi \, . \tag{3.100}$$

Der Ausgangspunkt der Störungstheorie ist eine Fourierreihe in der Zeit und der Winkelvariablen sowie eine Taylorentwicklung im Abstand $I^{1/2}$ zum Fixpunkt,

$$H = \frac{\alpha_1}{n_1} I + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m} V_{klm} I^{k/2} \cos\left(m\Phi - 2\pi \frac{l}{n_1} t + \Phi_{klm} \right) \; . \tag{3.101}$$

Die Summe über m läuft von $-k$ in Zweierschritten bis k, da nur solche Terme bei der Zerlegung eines Monoms $p^{k-m}q^m$ der Ordnung $I^{k/2}$ auftreten. Man geht nun genauso vor wie bei der Störung eines integrablen Systems. Die Stärke der Störung steigt jetzt allerdings mit wachsender Entfernung zur periodischen Bahn, weshalb man Ordnungen von I statt Ordnungen eines Parameters ε betrachtet. Durch kanonische Transformationen kann man in der lokalen Hamiltonfunktion beträchtliche Vereinfachungen vornehmen. Dabei transformiert man schrittweise alle winkelabhängigen Terme einer gewissen Ordnung $I^{k/2}$ weg. Es verbleiben zunächst nur rein I–abhängige Terme $I^{k/2}$ mit geradem k. Ist die Resonanzbedingung

$$\varepsilon \equiv \alpha_1 - 2\pi \frac{l}{m} = 0 \tag{3.102}$$

hinreichend gut erfüllt, läßt sich also $\alpha_1/2\pi$ gut durch den Bruch l/m approximieren, so bricht die Störungstheorie für den Term

$$\cos\left(m\Phi - 2\pi \frac{l}{n_1} t + \Phi_{klm}\right) \tag{3.103}$$

zusammen. Wie nun zu zeigen ist, hängt die Form der verbleibenden Resonanzterme von den sich in unmittelbarer Nachbarschaft befindlichen periodischen Bahnen ab. Diese Bahnen nennt man auch Satelliten. Eine Rolle spielen dabei nur jene Satelliten, deren Periode n_2 ein natürliches Vielfaches der Periode des zunächst betrachteten „zentralen“ Orbits ist, $n_2 = mn_1$ mit $m \in \mathbb{N}$. Ausgehend vom ungestörten, integrablen System (3.99) liegen sie auf gebrochenen rationalen Tori mit stroboskopischer Frequenz $\omega_2 = 2\pi \frac{l}{n_2}$. Abseits einer Bifurkation bleibt das lokale Verhalten nahezu unberührt. Unter Veränderung eines beliebigen Parameters ändern sich nun die Koeffizienten der lokalen Hamiltonfunktion. Für isolierte Parameterwerte ziehen sich rationale Tori auf den zentralen zusammen — es treten Bifurkationen auf, bei denen Satelliten mit dem zentralen Orbit zusammenfallen. Die Torusfrequenz $\omega_1 = \frac{\alpha_1}{n_1}$ am zentralen Orbit muß dazu mit ω_2 identisch sein. Die Bifurkation tritt somit gerade dann auf, wenn die Resonanzbedingung (3.102) erfüllt ist.

Für den Stabilitätsfaktor der zentralen Bahn gilt an der Bifurkation

$$\operatorname{tr} M^{(n_1)} = 2\cos\left(2\pi \frac{l}{m}\right) \tag{3.104}$$

und

$$\operatorname{tr} M^{(n_2)} = 2. \tag{3.105}$$

Diese universelle Bedingung für das Auftreten einer Bifurkation in der n_2–Schritt–Abbildung läßt sich folgendermaßen verstehen: In der Nähe einer Bifurkation gibt es in einem kleinen Bereich des Phasenraums mehrere Punkte, für die die Abbildung $\mathfrak{F}^{(n_2)}$ beinahe die Identität ist. Wir folgern, daß die linearisierte Abbildung in mindestens einer Richtung wie die Identität wirkt. In diese Richtung zeigt mit anderen Worten ein Eigenvektor mit Eigenwert eins. Wegen der Flächenerhaltung muß auch der zweite Eigenwert eins sein, in Übereinstimmung zu (3.105).

Wegen der Entartung der Eigenwerte ist der Eigenraum für $m = 1, 2$ im Regelfall nur eindimensional. $M^{(n_2)}$ kann dann in die Jordannormalform gebracht werden und beschreibt eine Scherung. Ist allerdings $m > 2$, so sind die Eigenwerte von $M^{(n_1)}$ laut (3.104) voneinander verschieden, und es gilt $M^{(n_2)} = \mathbb{1}$.

Betrachtet man in der Nähe einer Bifurkation nur die an ihr beteiligten Orbits, erfährt die Hamiltonfunktion eine weitere Vereinfachung. Für Bifurkationen der Kodimension eins bedeutet dies, daß man nur den führenden Resonanzterm mitnimmt. Bei gegebenem m in (3.102) ist er von Ordnung $I^{m/2}$. Die Struktur des Normalform hängt in der Folge nicht direkt von den primitiven Perioden der bifurkierenden Bahnen ab, sondern nur von ihrem Verhältnis m. Wir können uns auf den Fall $n_1 = 1$ beschränken. Geht man in ein rotierendes Koordinatensystem $\varphi = \Phi - 2\pi \frac{l}{m} t$ über, führt dies auf

$$H^{(m)} = \varepsilon I + \sum_{k=2}^{[m/2]} a_k I^k + b I^{m/2} \cos(m\varphi) \, . \tag{3.106}$$

Dies sind die Birkhoffschen Normalformen [30,36,76]. Hier ist ε gerade der Bifurkationsparameter (3.102). Der Ausdruck $[m/2]$ bedeutet $m/2$ für gerades m und $(m-1)/2$ für ungerades m.

Es ist oft sinnvoll, wieder zu den Koordinaten q und p zurückzukehren und gegebenenfalls weitere Vereinfachungen durchzuführen. Für $m = 1$ setzt man sich zwischen die periodischen Bahnen; in diesem Fall wie auch für $m = 2$ kann man noch Terme wegschaffen, die keinen Einfluß auf ihre Eigenschaften haben. Man erhält die Normalformen

$$H^{(1)} = \varepsilon q + a q^3 + \frac{\sigma}{2} p^2 \, , \tag{3.107}$$

$$H^{(2)} = \varepsilon q^2 + a q^4 + \frac{\sigma}{2} p^2 \, . \tag{3.108}$$

Die entsprechenden Normalformen für $m = 3$ und $m = 4$ sind

$$\begin{aligned} H^{(3)} &= \varepsilon I + a I^{3/2} \cos(3\varphi) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(p^2 + q^2) + \frac{a}{2\sqrt{2}}(p^3 - 3pq^2) \, , \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned} H^{(4)} &= \varepsilon I + a I^2 + b I^2 \cos(4\varphi) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(p^2 + q^2) + \frac{a}{4}(p^2 + q^2)^2 + \frac{b}{4}(p^2 + q^2 - 6p^2 q^2) \, . \end{aligned} \tag{3.110}$$

Für jedes Verhältnis $m \in \mathbb{N}$ der Perioden der Satelliten und des zentralen Orbits gibt es genau einen Bifurkationstyp der Kodimension eins. Als Ausnahme gibt es für $m = 4$ zwei Typen. Ferner weisen alle Fälle für $m \geq 5$ untereinander große Ähnlichkeiten auf. Diese verschiedenen Periode–m–Bifurkationen sollen nun näher diskutiert werden. Insbesondere interessiert uns das Verhalten der verschiedenen Größen in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter ε.

Wie das zugrundeliegende Hamiltonsche System läßt sich auch die aus der Birkhoffschen Normalform resultierende stroboskopische Entwicklung durch eine erzeugende Funktion $\hat{S}(q',p)$ beschreiben. In führender Ordnung lautet die entsprechende Normalform in Analogie zu (3.84)

$$\hat{S}(q',p) = S_0 + q'p - H(q',p) \; . \tag{3.111}$$

Aus ihr leiten sich Eigenschaften der Wirkungen S, der Stabilitätsfaktoren $\mathrm{tr}\, M$ und der Maslovindizes ν der bifurkierenden Orbits her.

3.4.2 Von der Normalform zu den Eigenschaften bifurkierender Bahnen

Es soll nun skizziert werden, wie man aus den Normalformen Kenntnis über die charakteristischen Größen der bifurkierenden Bahnen erlangt.

Die Koordinaten der Orbits sind durch die Fixpunktgleichungen (3.19) gegeben und liegen an den Extrema von $\hat{S}(q',p) - q'p$. Die Wirkung der Bahn ist der Funktionswert von $\hat{S}(q',p) - q'p$ am Extremum. Die Stabilitätsfaktoren folgen aus Gleichung (3.34); da in den Normalformen jeweils $\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} = 1$ gilt, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\mathrm{tr}\, M = 2 - \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q'^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial p^2} \; . \tag{3.112}$$

Eine stabile Bahn entspricht einem lokalen Minimum oder Maximum von $\hat{S}(q',p) - q'p$, ebenso eine invers instabile Bahn. Ein gewöhnlicher instabiler Orbit liegt auf einem Sattel. In den Koordinaten der Normalform sind die Morseindizes $\hat{\mu}$ der eng benachbarten bifurkierenden Bahnen identisch. Die Maslovindizes lassen sich dann aus den Gleichungen (3.47) mit (3.49) bestimmen. Maxima haben den Maslovindex $\hat{\mu} + 1$, Minima den Maslovindex $\hat{\mu} - 1$; für Sättel ist er mit $\hat{\mu}$ identisch. Diese Formeln für den Maslovindex gelten mit wachsender Entfernung von der Bifurkation im Parameterraum, bis die Orbits an weiteren Bifurkationen in der betrachteten n–Schrittabbildung beteiligt sind. Auch das Verhalten der Wirkungen und der Stabilitätsfaktoren wird nur sinnvoll beschrieben, solange nicht weitere Orbits in die Nähe geraten.

Für die bifurkierenden Bahnen treten wie bei den gebrochenen Tori Beziehungen zwischen den Stabilitätsfaktoren auf. Diese sind wieder nur in der Nähe der betrachteten Bifurkation gut erfüllt und brechen allmählich zusammen, wenn man das System von ihr wegsteuert. Um unabhängige Stabilitätsfaktoren zu erhalten, braucht man in der erzeugenden Funktion eine genügende Zahl von Koeffizienten. Dies wird bei der späteren semiklassischen Behandlung noch wichtig werden. Für den Fall $m = 1$ nehmen wir daher weitere Terme höherer Ordnung mit und behandeln diese als Störungen, die sich in höheren Termen einer Entwicklung nach ε niederschlagen. Auch in den anderen Fällen kann man so vorgehen. Dies wird jedoch recht schnell ein aufwendiges Unterfangen mit länglichen Ausdrücken, die nur noch mit symbolischen Mathematikprogrammen handhabbar sind. Bei der Behandlung des semiklassischen Beitrags der Bahnen zur Spur erhält man wieder ein einfaches Ergebnis, weswegen wir auf die technischen Details verzichten wollen. Ein Hinweis auf die Arbeiten [26,27,37], in denen das skizzierte Programm durchgeführt ist, soll an dieser Stelle genügen.

Bei allen Bifurkationstypen bleibt die Zahl der periodischen Bahnen über die Bifurkation hinweg konstant, wenn man auch komplexe Koordinaten zuläßt. Die komplexen *Geister*lösungen haben zwar keine klassische Bedeutung, sie werden aber bei der semiklassischen Behandlung wichtig. Die charakteristischen Größen der Geisterbahnen werden in Abschnitt 4.1.6 bereitgestellt.

3.4.3 Tangentenbifurkationen ($m = 1$)

Die Tangentenbifurkation ist die Geburtsstätte zweier periodischer Bahnen gleicher Länge: Zwei zuvor zueinander konjugiert komplexe Lösungen der Fixpunktgleichungen treffen sich bei reellen Koordinaten und wandern dann als reelle Bahnen voneinander weg. Die Zahl der reellen Lösungen der Fixpunktgleichungen erhöht sich somit um zwei. Eine der beiden neuen Bahnen ist zunächst stabil, die andere instabil. Abbildung 5 zeigt eine Abfolge von Phasenraumportraits in der näheren Umgebung einer Tangentenbifurkation, die beim Kreisel für $k = 2.45\ldots$ auftritt.

Die Birkhoffsche Normalform lautet in diesem Fall

$$\hat{S}(p, q') = S_0 + pq' - \varepsilon q' - aq'^3 - \frac{\sigma}{2}p^2 \; . \tag{3.113}$$

Eine Skalentransformation $(q, p) \to (q/\lambda, p\lambda)$ läßt uns über den Betrag von σ frei verfügen; wir wählen $\sigma = \pm 1$. Die Fixpunktgleichungen

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial q'} = p - \varepsilon - 3aq'^2 = p \; , \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial p} = q' - \sigma p = q' \tag{3.115}$$

haben zwei Lösungen,

$$\begin{aligned} p_\pm &= 0 \; , \\ q'_\pm &= \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} \; . \end{aligned} \tag{3.116}$$

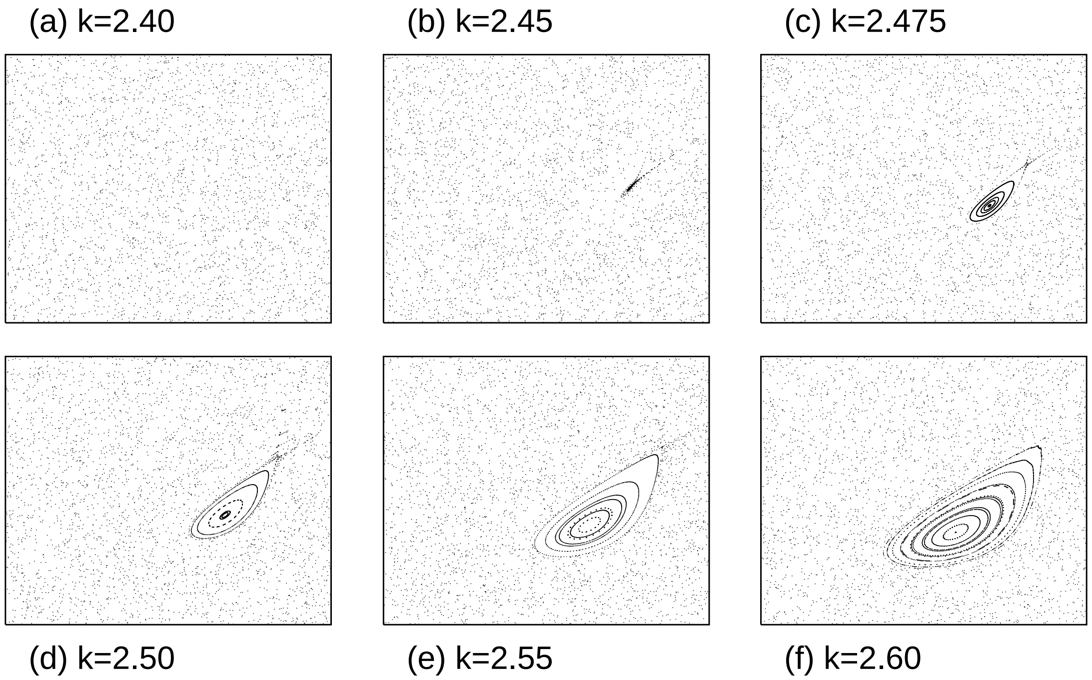


Abbildung 5: Phasenraumportraits in der Nähe einer Tangentenbifurkation bei $k = 2.45\ldots$

Die beiden Bahnen liegen also auf der q–Achse. Ihre Koordinaten sind reell für $\operatorname{sign} \varepsilon a = -1$ und zueinander konjugiert komplex für $\operatorname{sign} \varepsilon a = 1$; an der Bifurkation bei $\varepsilon = 0$ fallen sie zusammen. Der Wert der Wirkung $S = \hat{S} - q'p$ an den Fixpunkten ist

$$S_\pm = S_0 \mp \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} \,. \tag{3.117}$$

Die Spuren der Stabilitätsmatrix lauten

$$\operatorname{tr} M_\pm = 2 \mp 6a\sigma\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} \,. \tag{3.118}$$

Eine Bahn ist zunächst stabil und kann weitab der Bifurkation auch invers instabil werden. Die andere ist ein gewöhnlicher instabiler Orbit. In führender Ordnung der lokalen Näherung gehorchen die Stabilitätsfaktoren der Beziehung

$$\operatorname{tr} M_+ + \operatorname{tr} M_- = 4 \,, \tag{3.119}$$

von der wir uns nun zu lösen suchen, indem wir in einer erweiterten Normalform einen Term mehr mitnehmen und seine Auswirkung auf die Eigenschaften der beiden bifurkierenden Bahnen in der nächsthöheren Ordnung in ε betrachten.

Die Anordnung der periodischen Bahnen auf der q–Achse erlaubt es, das Problem als ein eindimensionales zu betrachten. Es genügt dann, in der nächsthöheren Ordnung nur den rein q'–abhängigen Term bq'^4 zu berücksichtigen und p–abhängige höhere

Terme zu vernachlässigen. Die mathematische Rechtfertigung dafür liefert das sogenannte Aufspaltlemma der Katastrophentheorie [50]. Wir arbeiten demzufolge mit der erweiterten Normalform

$$\hat{S}(q',p) = S_0 + pq' - \varepsilon q' - aq'^3 - bq'^4 - \frac{\sigma}{2}p^2 \, . \tag{3.120}$$

Bis in zweite Ordnung in $\sqrt{|\varepsilon|}$ liegen die Fixpunkte bei

$$\begin{aligned} p_\pm &= 0 \, , \\ q'_\pm &= \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} + \frac{2b\varepsilon}{9a^2} + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{3/2}) \, , \end{aligned} \tag{3.121}$$

wobei wir uns an dieser Stelle nicht um den formal auftretenden dritten Fixpunkt kümmern. Dies werden wir erst bei der daraus resultierenden Kodimension–zwei–Bifurkation in Abschnitt 3.5.1 tun. Die Fixpunkte tragen die Wirkung

$$S_\pm = S_0 \mp \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} - \frac{b\varepsilon^2}{9a^2} + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{5/2}) \, . \tag{3.122}$$

Die Spuren der linearisierten Abbildung lauten

$$\mathrm{tr}\, M_\pm = 2 \mp 6a\sigma\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} + \frac{8\sigma b}{3a}\varepsilon + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{3/2}) \tag{3.123}$$

und verletzen somit die Beziehung (3.119) in Ordnung ε. Die Morseindizes $\hat{\mu}$ der eng benachbarten Bahnen sind identisch. Die Maslovindizes erhält man daher aus den Gleichungen (3.47) und (3.49) zu

$$\begin{aligned} \nu_\pm &= \hat{\mu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\sigma \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,a \\ &= \begin{cases} \hat{\mu} & \text{instabiler Orbit} \\ \hat{\mu} + \mathrm{sign}\,\sigma & \text{stabiler Orbit} \end{cases} \, . \end{aligned} \tag{3.124}$$

3.4.4 Periodenverdopplungen ($m = 2$)

Bei einer Periodenverdopplung wechselt ein zentraler Orbit der Länge n_0 seine Stabilität und erhält dabei einen Satelliten doppelter Periodenlänge $n_1 = 2n_0$. Abbildung 6 illustriert dies anhand einer Periodenverdopplung, die man beim Kreisel bei $k = 4.31\ldots$ vorfindet. Der zentrale Orbit ist für $k > 4.31\ldots$ instabil und ist übrigens in der vorher gezeigten Tangentenbifurkation bei $k = 2.45\ldots$ mit stabilem Verhalten entstanden. Der hinzugekommene stabile Satellit wiederum wird bereits bei $k = 4.78\ldots$ in einer hier nicht gezeigten weiteren Periodenverdopplung wieder instabil, unter Auftreten eines stabilen Satelliten der Länge vier. Kaskaden dieser Art sind der Mechanismus,

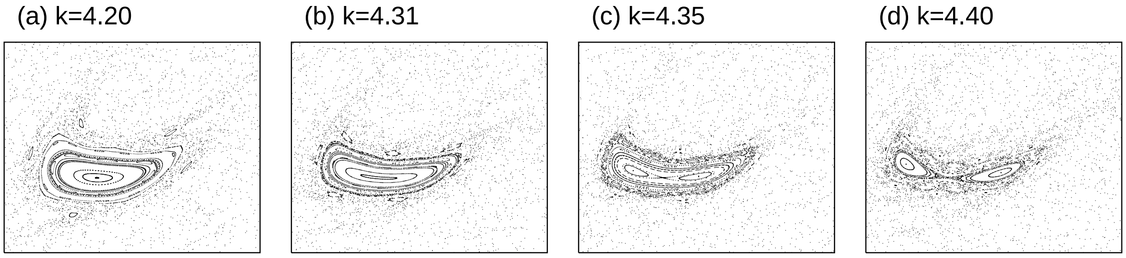


Abbildung 6: Phasenraumportraits in der Nähe einer Periodenverdopplung bei $k = 4.31\ldots$

durch den Stabilitätsinseln auf dem Weg zu ausgeprägtem Chaos vernichtet werden [32, Kapitel 7.3b], [77, Kapitel 3.8.2].

Man beschreibt Periodenverdopplungen mittels der Normalform

$$\hat{S}(q', p) = S_0 + q'p - \varepsilon q'^2 - aq'^4 - \frac{\sigma}{2}p^2 \; . \tag{3.125}$$

Wie bei der Tangentenbifurkation können wir durch Skalieren der Koordinaten $\sigma = \pm 1$ erreichen. Die periodischen Bahnen liegen bei

$$p_0 = 0, \qquad q'_0 = 0 \; , \tag{3.126}$$

$$p_1 = 0, \qquad q'_1 = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2a}} \; . \tag{3.127}$$

Dabei bezeichnet der Index 0 den zentralen Orbit und der Index 1 den Satelliten, der entsprechend seiner doppelt so großen Periodenlänge durch zwei Fixpunkte repräsentiert wird. Die Koordinaten des Satelliten sind für $\varepsilon/a > 0$ komplex (in der Normalformkoordinate q sogar rein imaginär) und werden mit dem Vorzeichenwechsel von ε an der Bifurkation reell.

Die Wirkungen der periodischen Bahnen sind S_0 und

$$S_1 = S_0 + \frac{\varepsilon^2}{4a} \; . \tag{3.128}$$

Die Spuren der linearisierten Abbildungen lauten

$$\mathrm{tr}\, M_0 \;=\; 2 - 2\sigma\varepsilon \; , \tag{3.129}$$

$$\mathrm{tr}\, M_1 \;=\; 2 + 4\sigma\varepsilon \; ; \tag{3.130}$$

sie genügen der Relation

$$2\,\mathrm{tr}\, M_0 + \mathrm{tr}\, M_1 = 6 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \; . \tag{3.131}$$

Nahe der Bifurkation ist entweder der Satellit oder der zentrale Orbit stabil, die andere Bahn ist dann instabil. Der zentrale Orbit ändert seine Stabilität mit dem Vorzeichenwechsel von ε an der Bifurkation. Die Morseindizes $\hat{\mu}$ der beiden Bahnen sind in den lokalen Koordinaten der Normalform wieder gleich. Die Maslovindizes sind damit

$$\nu_0 = \hat{\mu} + \frac{1}{2}(\operatorname{sign}\sigma + \operatorname{sign}\varepsilon) , \tag{3.132}$$

$$\nu_1 = \hat{\mu} + \frac{1}{2}(\operatorname{sign}\sigma - \operatorname{sign}\varepsilon) . \tag{3.133}$$

Für die instabile Bahn gilt so ein weiteres Mal $\nu = \hat{\mu}$, für die andere $\nu = \hat{\mu} + \operatorname{sign}\sigma$.

Es ist interessant, daß Wirkung und Stabilitätsfaktor des Satelliten selbst für komplexe Koordinaten reelle Größen sind. Dies gilt nicht nur in den hier aufgeführten führenden Ordnungen in ε, sondern sogar exakt. Die Ursache liegt darin, daß die Koordinaten eines komplexen Satelliten aus einer Periodenverdopplung in konjugiert komplexen Paaren auftreten. Der Orbit geht also unter komplexer Konjugation in sich selbst über, und so geschieht es auch mit seinen charakteristischen Größen, die mithin reell sind. Erst wenn der Satellit mit einer anderen komplexen Bahn in einer Bifurkation im Komplexen aufeinandertrifft, können sich die konjugierten Koordinatenpaare voneinander lösen und in der Folge zu zwei verschiedenen Bahnen mit komplexen Wirkungen und Stabilitätsfaktoren gehören.

3.4.5 Periodenverdreifachungen ($m = 3$)

Periodenverdreifachungen stellen sich wie folgt dar: Um jeden Punkt der Trajektorie eines zentralen Orbits der Länge n_0 liegen drei Punkte der Trajektorie eines Orbits der Länge $n_1 = 3n_0$ und bilden dabei ein Dreieck. Dieses Dreieck wird beim Zusteuern auf die Bifurkation immer kleiner. An der Bifurkation fallen alle vier Punkte zusammen. Jenseits der Bifurkation bilden die Satellitenpunkte wieder ein Dreieck, jedoch ein punktgespiegeltes: Die Satellitenpunkte wandern durch den zentralen Orbit hindurch, treten also diametral wieder aus ihm heraus. Die Periodenverdreifachung zeichnet sich mithin dadurch aus, daß bei ihr keine Orbits verschwinden oder neu entstehen, sondern ihre Zahl unverändert bleibt.

Die Abfolge von Phasenraumportraits in Abbildung 7 illustriert das geschilderte Szenarium anhand des bereits bei $m = 1$ und $m = 2$ untersuchten zentralen Orbits, der auf dem Weg zwischen der Tangentenbifurkation und der Periodenverdopplung eine Periodenverdreifachung bei $k = 3.545\ldots$ erfährt.

Die Normalform lautet

$$\hat{S}(q', p) = q'p - \frac{\varepsilon}{2}(p^2 + q'^2) - \frac{a}{2\sqrt{2}}(p^3 - 3pq'^2) . \tag{3.134}$$

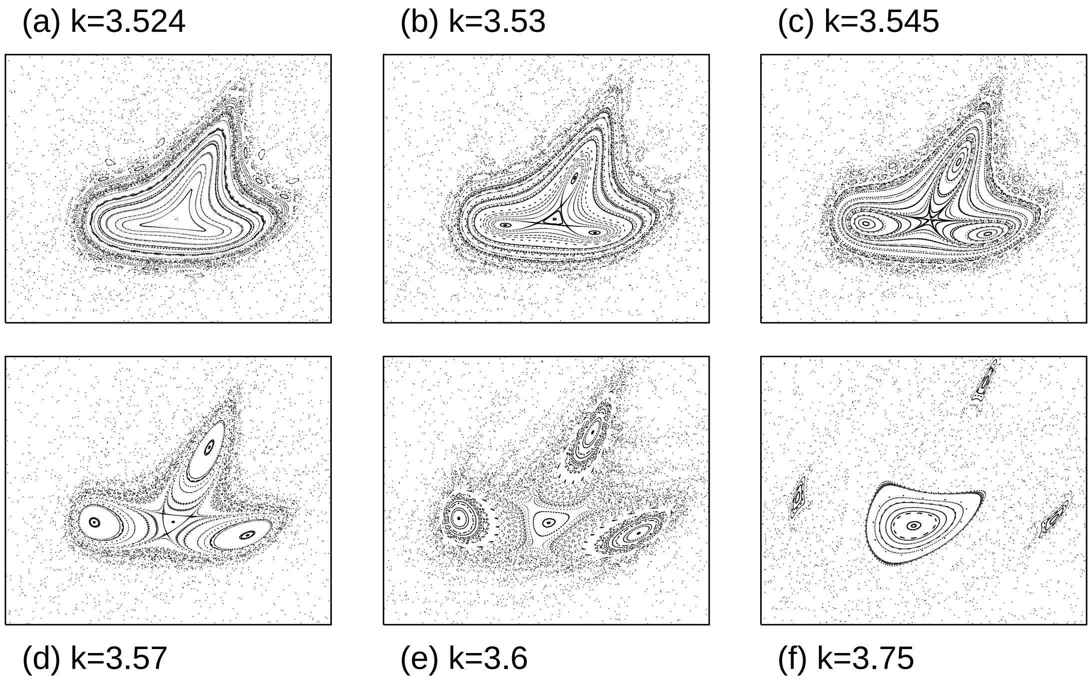


Abbildung 7: Phasenraumportraits in der Nähe einer Periodenverdreifachung bei $k = 3.545\ldots$. Die Satelliten entstehen in einer Tangentenbifurkation bei $k = 3.525\ldots$.

Man sucht die Fixpunkte auf, die in Polarkoordinaten auf den Linien $\sin(3\varphi) = 0$ liegen, mit $I = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon^2}{a^2}$. Daraus erhält man die Wirkungen S_0 für den zentralen Orbit und

$$S_1 = S_0 - \frac{4}{27a^2}\varepsilon^3 \tag{3.135}$$

für den Satelliten sowie die Spuren der linearisierten Abbildungen

$$\operatorname{tr} M_0 = 2 - \varepsilon^2 , \tag{3.136}$$

$$\operatorname{tr} M_1 = 2 + 3\varepsilon^2 . \tag{3.137}$$

Es gilt in der angegebenen Ordnung in ε

$$3 \operatorname{tr} M_0 + \operatorname{tr} M_1 = 8 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) . \tag{3.138}$$

Die Maslovindizes ergeben sich zu $\nu_1 = \hat{\mu}$ und

$$\nu_0 = \hat{\mu} + \operatorname{sign} \varepsilon . \tag{3.139}$$

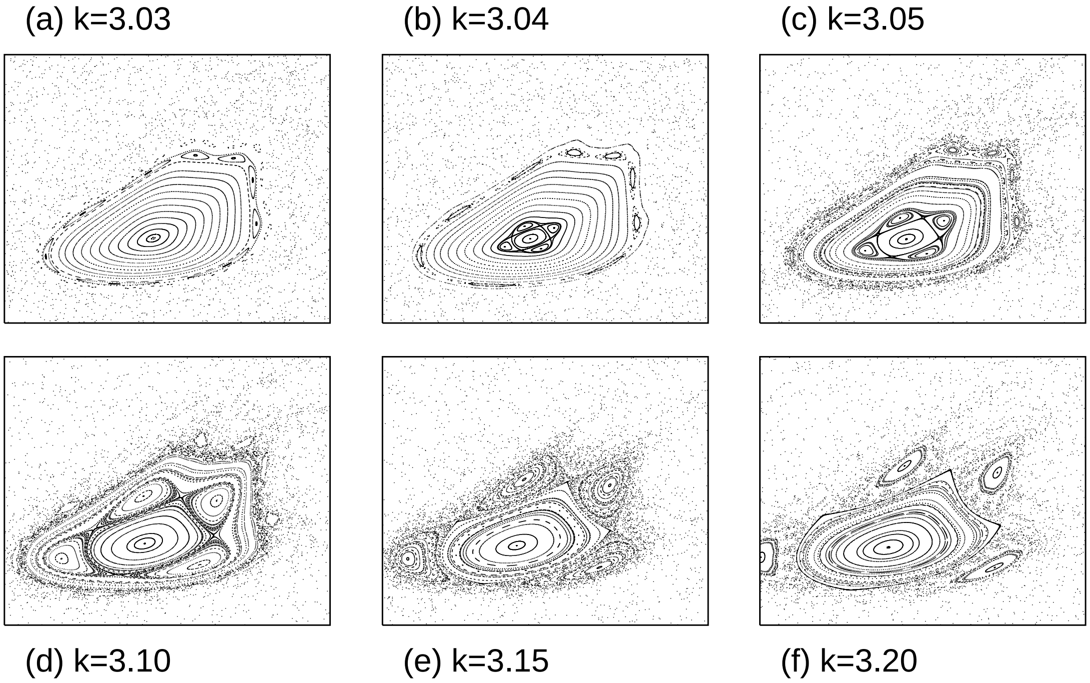


Abbildung 8: Phasenraumportraits in der Nähe einer Periodenvervierfachung bei $k = 3.034\ldots$

3.4.6 Periodenvervierfachungen ($m = 4$)

Die Periodenvervierfachung wird in Winkel–Wirkungsvariablen durch die Normalform

$$\hat{S}(\varphi', I) = S_0 + \varphi' I - \varepsilon I - aI^2 - bI^2 \cos(4\varphi') \tag{3.140}$$

beschrieben. Neben der zentralen periodischen Bahn bei $I_0 = 0$ gibt es zwei Satelliten $(+, -)$ der vierfachen Periodenlänge bei

$$\cos(4\varphi_\pm) = \pm 1 \ , \qquad I_\pm = -\frac{\varepsilon}{2a \pm 2b} \ . \tag{3.141}$$

Die periodischen Bahnen haben reelle Koordinaten für $I \geq 0$. Die Trajektorie des Orbits $+$ liegt auf den Koordinatenachsen, die des Orbits $-$ auf den Winkelhalbierenden. Die Wirkungen sind S_0 für die zentrale periodische Bahn und

$$S_\pm = S_0 + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{a \pm b} \tag{3.142}$$

für die Satelliten. Die Stabilitätsfaktoren lauten

$$\mathrm{tr}\, M_0 = 2 - \varepsilon^2 \ , \tag{3.143}$$

$$\mathrm{tr}\, M_\pm = 2 \pm 8b\frac{\varepsilon^2}{a \pm b} \ . \tag{3.144}$$

Wie bei der Periodenverdopplung haben selbst Satelliten mit komplexen Koordinaten reelle Wirkungen und Stabilitätsfaktoren. Die Maslovindizes sind

$$\nu_0 = \hat{\mu} + \operatorname{sign} \varepsilon \,, \tag{3.145}$$

$$\nu_\pm = \hat{\mu} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(a \pm b) \mp \frac{1}{2} \operatorname{sign} b \,. \tag{3.146}$$

Je nach relativer Größe von $|a|$ und $|b|$ gibt es zwei verschiedene Varianten der Periodenvervierfachung.

- $|a| < |b|$: Auf beiden Seiten der Bifurkation gibt es je einen Satelliten mit komplexen und einen mit reellen Koordinaten. Steuert man das System über die Bifurkation, tauschen dabei die beiden Satelliten ihre Rollen. Der reelle Satellit ist jeweils instabil.
- $|a| > |b|$: Auf der einen Seite der Bifurkation gibt es nur komplexe Satellitenlösungen, die an der Bifurkation mit dem zentralen Orbit zusammenfallen und dann als zwei reelle Satelliten von ihm wegwandern. Der eine Satellit ist zunächst stabil, der andere instabil. Abbildung 8 illustriert diese Bifurkation anhand des Orbits, der in der Tangentenbifurkation bei $k = 2.45\ldots$ als stabile periodische Bahn entstanden ist. Die Periodenvervierfachung findet bei $k = 3.034\ldots$ statt.

3.4.7 Höhere Periode–m–Bifurkationen

Die Periode–m–Bifurkationen mit $m \geq 5$ verlaufen alle nach dem gleichen Schema: Komplexe Vorläuferlösungen zweier Satelliten treffen an einer zentralen periodischen Bahn zusammen. Es entstehen zwei reelle Satelliten, und zwar ein stabiler und ein instabiler. Dieses Szenarium gleicht der zweiten Variante der Periodenvervierfachung ($|a| > |b|$). Wir werden solche Bifurkationen in dieser Arbeit nicht weiter untersuchen. Der Vollständigkeit halber seien aber die wichtigsten Eigenschaften aufgeführt [37]. Sie folgen aus der Normalform

$$\hat{S}(\varphi', I) = S_0 + \varphi' I - \varepsilon I - \sum_{k=2}^{[m/2]} a_k I^k - b I^{m/2} \cos(m\varphi) \,. \tag{3.147}$$

Die Satelliten liegen auf den Linien $\cos(m\varphi) = \pm 1$. Ihr Abstand I ist von Ordnung ε und unterscheidet sich in Ordnung $\varepsilon^{\frac{m}{2}-1}$. Die Wirkung des zentralen Orbits ist S_0. Die Wirkungen der Satelliten sind in führender Ordnung identisch, $S_\pm = S_0 + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{a_2}$, und unterscheiden sich in Ordnung $\varepsilon^{m/2}$. Die Spur der linearisierten Abbildung ist $\operatorname{tr} M_0 = 2 - \varepsilon^2$. Die Stabilitätsfaktoren der Satelliten sind von Ordnung $\operatorname{tr} M_\pm = 2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-2})$ und unterscheiden sich in Ordnung ε^{m-2}. Der Morseindex $\hat{\mu}$ in Normalformkoordinaten ist für alle Orbits identisch, und man erhält die Maslovindizes

$$\nu_0 = \hat{\mu} + \operatorname{sign}\varepsilon\,, \tag{3.148}$$

$$\nu_\pm = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\varepsilon \mp \frac{1}{2}\operatorname{sign} b\,. \tag{3.149}$$

3.5 Aufeinanderfolgende Bifurkationen

Wir haben bereits gesehen, daß eine periodische Bahn in der Regel in verschiedene aufeinanderfolgende Bifurkationen verwickelt ist. Auch die typischerweise auftretenden Abfolgen von Bifurkationen der Kodimension eins lassen sich klassifizieren. Wir wollen Kaskaden und Sequenzen von Bifurkationen unterscheiden. Eine Kaskade ist eine Abfolge von Bifurkationen, die zu verschiedenen Wiederkehrzeiten sichtbar werden. Ein Beispiel ist die Tangentenbifurkation aus Abbildung 5 mit den nachfolgenden Periodenver–m–fachungen des zentralen Orbits in den Abbildungen 6, 7 und 8. Die verschiedenen Bifurkationen treten erstmals in der m–Schritt–Abbildung auf. Solche Kaskaden spielen in der Folge eine untergeordnete Rolle. Die einfachsten sollten sich durch Iteration der Abbildungen zu den verschiedenen bisher betrachteten Normalformen beschreiben lassen, wobei detailierte Studien noch ausstehen.

Wir konzentrieren uns auf Sequenzen von Bifurkationen, worunter wir Abfolgen verstehen wollen, die alle bei derselben Iteration der Abbildung zum ersten Mal sichtbar werden. Dies ist etwa bei der Tangentenbifurkation der Satelliten und der Periodenverdreifachung in Abbildung 7 gegeben. Solche Sequenzen leiten sich von Bifurkationen höherer Kodimension ab [38,39,28]. Diese treten auf, wenn man das System nicht nur mit einem Parameter steuert, sondern etwa einen weiteren Parameter k' zur Verfügung hat. Im Falle des Kreisels bietet sich zum Beispiel der Winkel p_y an, aber auch jede andere Kombination der vorhandenen Kopplungskonstanten. (Man könnte die Kreiselvariante auch in eine noch größere Klasse von Systemen einbetten, sich also beliebig viele andere Parameter hinzudenken.) Treten nun zwei aufeinanderfolgende Bifurkationen eines Orbits bei den Parameterwerten $k = k_1$ und $k = k_2$ auf, so hängen diese Werte auch von k' ab. Man kann k' in der Regel so einstellen, daß $k_1 = k_2$ wird und somit beide Bifurkationen gleichzeitig auftreten. Im Phasenraum treffen dann alle beteiligten Bahnen in einer Bifurkation der Kodimension zwei aufeinander, die komplizierter ist als die bisher diskutierten der Kodimension eins.

Die typische Konfiguration der Bahnen in der Nähe der Bifurkation findet man wieder aus der entsprechenden Normalform. Sie erhält man auf demselben Weg wie bei den Bifurkationen der Kodimension eins. Man muß nun in der Reduktion des vollen dynamischen Systems resonante Terme der nächsthöheren Ordnung in I beibehalten, wodurch in den Fixpunktgleichungen zusätzliche Lösungen auftreten. Auch auf einer Bifurkation der Kodimension zwei ist die Bifurkationsbedingung (3.102) erfüllt. Man kann daher erneut die Zahl m zur Klassifizierung hinzuziehen. Wir diskutieren hier die Fälle $m = 1, 2, 3$.

3.5.1 Zwei benachbarte Tangentenbifurkationen

Wir betrachten eine Situation, in der drei periodische Bahnen gleicher Länge sehr nahe beieinanderliegen und aufeinandertreffen, falls man zwei Kontrollparameter richtig einstellt. Verfügt man nur über einen Parameter, so findet man gegebenenfalls — aber nicht notwendigerweise — zwei Tangentenbifurkationen bei eng benachbarten Parameterwerten, häufig aber zumindest eine. Wir benötigen den Term nächsthöherer Ordnung in der Erzeugenden $\hat{S}$, ausgehend von der Form (3.113) in der Nähe einer Tangentenbifurkation. Ihn haben wir bereits bei der Diskussion des Zusammenbrechens der Beziehung (3.119) kennengelernt. Wir benutzen also erneut die Normalform (3.120)

$$\hat{S}(q', p) = S_0 + q'p - \varepsilon q' - aq'^3 - bq'^4 - \frac{\sigma}{2}p^2 \ . \tag{3.150}$$

Betrachtet man die zugehörigen Fixpunktgleichungen

$$p = 0 \ , \qquad \varepsilon + 3aq'^2 + 4bq'^3 = 0 \ , \tag{3.151}$$

so muß man ein Polynom dritten Grades lösen und erhält drei Fixpunkte, von denen jedoch zwei komplexwertig sein können. Dies richtet sich nach dem Vorzeichen der Diskriminante

$$D = \left(\frac{1}{8}\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{b}\left(\frac{1}{4}\frac{a}{b}\right)^3 \ . \tag{3.152}$$

Drei reelle Lösungen gibt es für $D < 0$, eine reelle und zwei zueinander konjugiert komplexe für $D > 0$. An den Bifurkationen verschwindet die Diskriminante; dies geschieht für $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = -\frac{1}{4}\frac{a^3}{b^2}$. In jedem Fall liegen alle drei Orbits auf der q–Achse.

Da ein Orbit immer reell ist, vereinfacht sich die Diskussion deutlich, wenn man ihn in den Ursprung des Koordinatensystems legt. Man hat dann

$$\hat{S} = S_0 + q'p - \varepsilon q'^2 - aq'^3 - bq'^4 - \frac{\sigma}{2}p^2 \tag{3.153}$$

mit veränderten Koeffizienten, die wir aber nicht anders bezeichnen wollen. Die Fixpunktgleichungen lauten nun

$$p = 0 \ , \qquad q'(2\varepsilon + 3aq' + 4bq'^2) = 0 \tag{3.154}$$

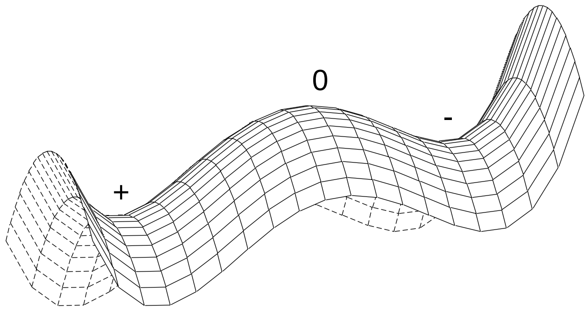


Abbildung 9: Qualitatives Verhalten von $\hat{S}(q', p) - q'p$ für drei eng benachbarte periodische Bahnen. Ihre Lage ist durch die Sättel bestimmt.

und haben die Lösungen $p_{0,\pm} = 0$, q_0=0 und

$$q_\pm = -\frac{3}{8}\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{9}{64}\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{b}}\,. \tag{3.155}$$

Daraus ergeben sich die Wirkungen, Stabilitätsfaktoren und Maslovindizes. Im Falle dreier reeller Orbits trifft man dann auf die folgende Situation, illustriert in Abbildung 9: Entlang der q'–Achse ist $\hat{S} - q'p$ eine quadratische Funktion mit einem Minimum zwischen zwei Maxima oder einem Maximum zwischen zwei Minima. Der mittlere der entlang der q'–Achse aufgereihten Orbits hat demnach entweder die größte oder die kleinste Wirkung. Seine Stabilität hängt weiter von der Krümmung $-\sigma$ der Erzeugenden in p–Richtung ab. Diese ist entlang der gesamten q'–Achse und somit auch an den Positionen der drei Orbits gleich. Daraus zieht man die folgenden Konsequenzen: Wenn der mittlere Orbit instabil ist, mit $\mathrm{tr}\, M > 2$, so haben die beiden anderen Orbits $\mathrm{tr}\, M < 2$, sind also entweder stabil oder invers instabil. Ist der mittlere Orbit stabil oder invers instabil, so sind die beiden anderen Orbits instabil mit $\mathrm{tr}\, M > 2$. Der Maslovindex ist für diese beiden Orbits gleich und um eins größer als der Maslovindex der mittleren Bahn, falls die Wirkung der mittleren Bahn minimal ist; andernfalls ist er um eins kleiner.

Wir wollen erklären, wie sich die Koeffizienten aus den Wirkungen der periodischen Bahnen bestimmen lassen. Die Vorgehensweise läßt sich auf andere Fälle übertragen und ist nützlich, wann immer geschlossene algebraische Ausdrücke nicht erhältlich sind.

Im Falle dreier reeller Orbits machen wir den Ansatz

$$\Phi(q) \equiv \hat{S}(q,p) - S_0 - qp + \frac{\sigma}{2}p^2 = A\left(\frac{1}{4}q^4 - \frac{1}{3}(1+q_-)q^3 + \frac{1}{2}q_- q^2\right) \tag{3.156}$$

mit

$$\frac{d\Phi}{dq} = Aq(q-1)(q-q_-) \tag{3.157}$$

und legen so den Satelliten + nach $q = 1$ sowie den Satelliten − nach $q = q_-$. Wir können $q_- \in [-1, 0]$ fordern, setzen uns also auf den mittleren Orbit; der Satellit + hat dann den größten Abstand zu seinem nächsten Nachbarn (vgl. erneut Abb. 9). Dies liefert die Wirkung S_0 für den zentralen Orbit sowie

$$S_+ = S_0 + \frac{A}{12}(2q_- - 1) \ , \tag{3.158}$$

$$S_- = S_0 + \frac{A}{12}(2 - q_-)q_-^3 \tag{3.159}$$

für die Satelliten. Es folgt

$$\frac{S_- - S_0}{S_+ - S_0} = q_-^3 \frac{q_- - 2}{1 - 2q_-} \equiv g(q_-) \ . \tag{3.160}$$

Im Intervall $(-1, 0)$ ist $g(q_-)$ eine monoton fallende Funktion. Daher kann q_- eindeutig bestimmt werden. Die Wirkung des Orbits − liegt zwischen denen der Orbits 0 und +, da im betrachteten Intervall $0 < g(q_-) < 1$ gilt. Der Vorfaktor A folgt aus (3.158) oder (3.159). Den Koeffizienten σ vor p^2 bestimmen wir aus dem Stabilitätsfaktor

$$\operatorname{tr} M_0 = 2 + Aq_-\sigma \ . \tag{3.161}$$

Durch Reskalieren von p und q kann man $\sigma = \pm 1$ erreichen.

Im Falle einer reellen und zweier zueinander konjugiert komplexer Bahnen führt der Ansatz

$$\Phi(q) = A\left(\frac{1}{2}(1 + \tilde{q}^2)q^2 - \frac{2}{3}q^3 + \frac{1}{4}q^4\right) \tag{3.162}$$

zum Ziel. Es ist

$$\frac{d\Phi}{dq} = Aq\left[(q-1)^2 + \tilde{q}^2\right] \ , \tag{3.163}$$

der reelle Orbit sitzt also bei $q = 0$, die komplexen Bahnen liegen bei $q_\pm = 1 \pm i\tilde{q}$. Die Wirkungen sind S_0 und

$$S_\pm = S_0 + A\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\tilde{q}^2 - \frac{1}{4}\tilde{q}^4 + i\frac{2}{3}\tilde{q}^3\right) \ . \tag{3.164}$$

Man legt nun $\tilde{q}$ aus dem Verhältnis

$$\frac{\operatorname{Re} S_+ - S_0}{\operatorname{Im} S_+} = \frac{1 + 6\tilde{q}^2 - 3\tilde{q}^4}{8\tilde{q}^3} \tag{3.165}$$

fest. Dies ist eine monotone Funktion auf $(0, \infty)$ und $(-\infty, 0)$. Das Intervall, in dem die Lösung gesucht werden muß, folgt aus den Ausdrücken

$$\mathrm{tr}\, M_0 = 2 + \sigma A(1 + \tilde{q}^2) \,, \tag{3.166}$$

$$\mathrm{tr}\, M_\pm = 2 - 2\sigma A \tilde{q}(\tilde{q} \mp i) \tag{3.167}$$

für die Stabilitätsfaktoren, denn es gilt $\mathrm{sign}\, \tilde{q} = \mathrm{sign}[(\mathrm{tr}\, M_0 - 2)/\, \mathrm{Im}\, \mathrm{tr}\, M_+]$. Der Vorfaktor A folgt aus dem Real- oder dem Imaginärteil von $S_+ - S_0$, der Koeffizient σ etwa aus $\mathrm{tr}\, M_0$.

3.5.2 Periodenverdopplung und Tangentenbifurkation

Wir betrachten nun den Fall, daß ein Satellit, der in einer Periodenverdopplung entstanden ist, anschließend in einer inversen Tangentenbifurkation mit einem weiteren Satelliten wieder verschwindet. Die Situation erinnert an die sogenannte Schwalbenschwanzkatastrophe. Steuert man das System im entgegengesetzten Sinn durch den Parameterraum, so verschwindet ein durch eine Tangentenbifurkation entstandener Orbit in einer inversen Periodenverdopplung. Die Normalform lautet [78]

$$\hat{S}(q', p) = S_0 + q'p - \varepsilon q'^2 - a q'^4 - b q'^6 - \frac{1}{2}\sigma p^2 \,. \tag{3.168}$$

Nur gerade Terme treten hier auf, da jeder Satellit an beiden Punkten seiner Trajektorie die gleichen Wirkungen und Stabilitäten hat. Genauer liegen die periodischen Bahnen auf der Linie $p = 0$ und haben dort die Koordinaten $q_0 = 0$,

$$q_\pm^2 = -\frac{1}{3}\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{9}\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{b}} \,. \tag{3.169}$$

Die Periodenverdopplung tritt bei $\varepsilon = 0$ auf, während die Tangentenbifurkation bei $\varepsilon = a^2/(3b)$ stattfindet. Die Wirkungen, Stabilitätsfaktoren und Maslovindizes lassen sich wieder in den Koeffizienten der Normalform ausdrücken; andersherum kann man die Koeffizienten aus den Größen der Bahnen bestimmen. Im Falle dreier reeller Bahnen liegt von den beiden Satelliten $\pm$ der Orbit $-$ näher an der zentralen Bahn 0. Aus den möglichen Abfolgen der Minima und Maxima von $\hat{S} - q'p$ entlang der q–Achse und den daraus folgenden Konfigurationen von Minima, Maxima und Sätteln in der q'-p–Ebene lernt man einiges über die qualitative Natur der periodischen Bahnen. So sind zum Beispiel die Orbits $+$ und 0 instabil, falls $-$ stabil ist. Bei $(q_-, 0)$ liegt dann ein Maximum oder Minimum von $\hat{S} - p'q$, an den Koordinaten der beiden anderen Orbits findet man Sättel. Die Betrachtung der übrigen möglichen Fälle schlagen sich in den Beziehungen

$$\mathrm{sign}(S_+ - S_-) = \mathrm{sign}(S_0 - S_-) \,,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}(2 - \mathrm{tr}\, M_0) &= \mathrm{sign}(2 - \mathrm{tr}\, M_+) = -\,\mathrm{sign}(2 - \mathrm{tr}\, M_-)\ , \\ \nu_0 = \nu_+ &= \nu_- + \mathrm{sign}(S_0 - S_-) \end{aligned} \tag{3.170}$$

nieder.

3.5.3 Periodenverdreifachung und Tangentenbifurkation

Die Periodenverdreifachung unterscheidet sich von allen anderen Bifurkationen dadurch, daß hier niemals komplexe Lösungen auftreten. Der Satellit entsteht jedoch in vielen Fällen erst kurz vor der Periodenverdreifachung in einer Tangentenbifurkation. Ein schönes Beispiel ist in Abbildung 7 zu sehen. Die Tangentenbifurkation findet bei $k = 3.525\ldots$ statt, die Periodenverdreifachungen bei $k = 3.545\ldots$. Diese enge Nachbarschaft im Parameterraum ist beim Kreisel nicht ungewöhnlich: Alle untersuchten Periodenverdreifachungen waren von einer Tangentenbifurkation des Satelliten begleitet. Für zentrale Orbits der primitiven Länge eins trifft man etwa mit steigendem k auf die Paare ($k = 1.853\ldots, 1.859\ldots$) und ($1.972\ldots, 1.975\ldots$), gefolgt von dem gerade erwähnten und weiteren bei ($9.335\ldots, 9.369\ldots$) und ($11.841\ldots, 11.886\ldots$).

Das Szenarium wird durch die Normalform

$$\hat{S}(\varphi', I) = S_0 + \varphi' I - \varepsilon I - a I^{3/2} \cos(3\varphi') - bI^2 \tag{3.171}$$

beschrieben. Der zusätzliche Term bI^2 zerstört nicht die diskrete Drehsymmetrie um $2\pi/3$; die Satelliten liegen daher weiterhin auf den Linien $\sin(3\varphi) = 0$. Wir kehren wieder zu kartesischen Koordinaten $q' = \sqrt{2I}\sin\varphi$, $p = \sqrt{2I}\cos\varphi$ zurück und betrachten die Fixpunktgleichungen auf der p–Achse,

$$\varepsilon p + \frac{3}{2\sqrt{2}} p^2 + bp^3 = 0\ . \tag{3.172}$$

Die Lösungen sind $p = 0$ sowie

$$p_\pm = -\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{9}{32}\frac{a^2}{b^2} - \frac{\varepsilon}{b}}\ . \tag{3.173}$$

Es tritt also ein weiterer Satellit auf. Die Periodenverdreifachung findet bei $\varepsilon = 0$ statt. Bei $\frac{9}{32}\frac{a^2}{b^2} = \frac{\varepsilon}{b}$ fallen die Koordinaten der Satelliten zusammen; hier tritt die Tangentenbifurkation auf. Für $\frac{\varepsilon}{b} \to -\infty$ bilden die beiden Satelliten in sehr großer Entfernung zum zentralen Orbit eine Art gebrochenen Torus. Bei reellen Koordinaten ist der entferntere Satellit wie der zentrale Orbit stabil (oder invers instabil), der andere Satellit ist ein normaler instabiler Orbit. Die Maslovindizes sind

$$\nu_0 = \hat{\mu} + \mathrm{sign}\,\varepsilon\ , \tag{3.174}$$

$$\nu_\pm \quad = \quad \hat{\mu} + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} b \mp \operatorname{sign} a) \,, \tag{3.175}$$

mit dem Morseindex $\hat{\mu}$.

Betrachtet man die Normalform auf der p–Achse, so hat sie dieselbe Struktur wie die Normalform (3.150) auf der q'–Achse. Man kann daher die Koeffizienten auf dieselbe Weise aus den Wirkungen gewinnen wie bei der Aufeinanderfolge zweier Tangentenbifurkationen, muß nun allerdings $\operatorname{tr} M_0 = 2 - \varepsilon^2$ benutzen, um die Radialkoordinate richtig zu skalieren.

3.6 Die periodischen Bahnen des Kreisels

3.6.1 Das Auffinden der Bifurkationen

Wir wissen von unserer Kreiselvariante in der Parametrisierung aus Abschnitt 2.2.3, daß sie bei $k = 0$ genau zwei periodische Bahnen besitzt. Sie haben die Periode eins und liegen dort, wo die Drehachse (2.32) die Einheitskugel durchstößt. Da die stroboskopische Frequenz (2.31) für alle Tori gleich und für allgemeine Parameterwahl kein rationales Vielfaches von 2π ist, gibt es insbesondere keine rationalen invarianten Tori. Zusätzliche periodische Bahnen bei einem von Null verschiedenen k müssen daher durch Bifurkationen entstanden sein. Um die periodischen Bahnen für beliebiges k bis zu einem Wert $k_{\max}$ zu erhalten, suchen wir zunächst die Bifurkationen in diesem k–Intervall auf, indem wir numerisch mittels eines Newtonalgorithmus die Lösungen q, p, k der Gleichungen

$$\mathfrak{F}^{(n)}(q,p) = (q,p) \,, \qquad \operatorname{tr} M^{(n)} = 2\cos\left(2\pi\frac{l}{m}\right) \tag{3.176}$$

bestimmen. Bei drei Unbekannten und drei Gleichungen findet man in der Regel isolierte Lösungstripel. Da wir nur einen Kontrollparameter zulassen, treffen wir nur auf Bifurkationen der Kodimension eins.

Der Newtonalgorithmus bringt unter anderem die erweiterte linearisierte Abbildung

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial(q',p',k')}{\partial(q,p,k)} \tag{3.177}$$

ins Spiel, mit $k' = k$. (Man benötigt darüberhinaus sogar Ableitungen der linearisierten Abbildung.) Nach der Kettenregel setzt sie sich durch Matrixmultiplikation aus den Matrizen $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Teilschritte $\tilde{\mathfrak{F}}$ zusammen. Diese haben die Einträge

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{ij} = \tilde{M}_{ij} \qquad \text{für } i,j = 1,2 \,,$$

	$i = 1$	2	3	4	5
$[^1/_0]$	$k = 0$				
$[^1/_1]$	2.4496570879	8.8147942804	11.357670526		
$[^1/_2]$	2.7816908359	2.8398940485	4.3082701518	9.7582668226	12.254290139
$[^1/_3]$	1.8594663798	1.9753023135	3.5448917906	9.3696437931	11.886171944
$[^1/_4]$	1.0055378826	1.1953979342	3.0336495024	9.0808380074	11.604370343

Tabelle I. Bifurkationswerte $k \lesssim 15$ für Bifurkationen mit zentralem Orbit der primitiven Periode eins und $m = 1 - 4$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{13} = \tilde{\mathfrak{M}}_{31} = \tilde{\mathfrak{M}}_{32} = 0 \,,$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{23} = \tilde{p}(p,q) \,,$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{33} = 1 \,. \tag{3.178}$$

Die Matrixelemente $\tilde{M}_{ij}$ sind in Gleichung (3.28) angegeben.

3.6.2 Bezeichnungskonvention für Bifurkationen und Bahnen

Wir wollen zunächst eine Bezeichnungskonvention für die Bifurkationen vereinbaren, um später eine bequeme Referenz zu ermöglichen. Bei unserer Kreiselstudie treten nur Bifurkationen der Kodimension eins auf. Für die an einer Bifurkation beteiligten Bahnen sei n die kürzeste auftretende primitive Periode. Die zugehörige Bahn haben wir in Periodenver–m–fachungen den zentralen Orbit genannt. Bei Tangentenbifurkationen ($m = 1$) denken wir an die stabile der beiden beteiligten Bahnen. Alle Periodenver–m–fachungen mit zentralem Orbit der primitiven Periode n belegen wir mit dem Symbol $[^n/_m]$. Die einzelnen Bifurkationen numerieren wir mit einem Index $i = 1, 2, 3, \ldots$ fortlaufend in der Reihenfolge, in der sie mit von Null anwachsendem k auftreten. So bezeichnet $[^1/_2]_3$ die dritte Periodenverdopplung von Orbits der primitiven Länge eins; $[^3/_1]_2$ ist die zweite Tangentenbifurkation von Orbits der primitiven Länge drei. Aus formalen Gründen belegen wir die bloße Existenz der beiden trivialen Fixpunkte bei $k = 0$ mit dem Symbol $[^1/_0]$.

Die ersten Bifurkationswerte zu den primitiven Perioden $n = 1, 2, 3$ und niedrigen Wiederkehrzahlen m sind in den Tabellen I – III aufgeführt.

Die verschiedenen an einer Bifurkation beteiligten Bahnen unterscheiden wir durch hochgestellte Indizes $[^n/_m]_i^{(0,1,2)}$. Das Symbol 0 steht für den zentralen Orbit einer jeden Bifurkation. Von den beiden komplexen Geisterlösungen vor einer Tangentenbifurkation bezeichnet es diejenige mit $\operatorname{Im} S > 0$. Die Symbole $1, 2$ werden für Satelliten verwandt. Die dem trivialen Fixpunkt bei $+\tilde{\mathbf{X}}$ zugeordnete Bahn bezeichnen wir mit

	i=1	2	3	4	5
$[^2/_1]$	4.8715494561	5.8825712602	7.1477166158	8.1245835958	9.4560885151
$[^2/_2]$	3.4382754082	3.5478504925	4.7882275091	5.1796021254	5.9535064059
	$i = 6$	7	8	9	10
$[^2/_1]$	10.037956781	10.696769542	10.828905504		
$[^2/_2]$	7.2615873207	7.6228831874	8.2056311668	8.2704694861	9.4786496773
	$i = 11$	12	13	14	
$[^2/_2]$	9.9795043723	10.047073070	10.708784467	10.859743227	

Tabelle II. Bifurkationswerte $k \lesssim 11$ für Bifurkationen mit zentralem Orbit der primitiven Periode zwei und $m = 1$, $m = 2$

	$i = 1$	2	3	4	5
$[^3/_1]$	1.8533834025	1.9715170531	3.5253108955	3.7856745793	5.9406812125
	$i = 6$	7	8	9	10
$[^3/_1]$	6.3033868836	6.3613347987	6.7619206470	6.8069656897	6.8840301184
	$i = 11$	12	13	14	15
$[^3/_1]$	6.9677348041	7.0630392882	7.1005680997	7.6099075081	7.8571710904
	$i = 16$	17	18	19	20
$[^3/_1]$	8.1791073408	8.3250930102	8.4196770048	8.7153291970	8.8184764699
	$i = 21$	22	23	24	25
$[^3/_1]$	8.9041486539	9.1184287858	9.3346952942	9.3375196017	9.3403733820
	$i = 26$	27	28	29	30
$[^3/_1]$	9.4181316373	9.5601300146	9.7683658777	9.8210165092	9.8316021114
	$i = 31$	32	33	34	35
$[^3/_1]$	9.9300879627	10.509976232	10.586545411	10.618795581	10.653873847

Tabelle III. Bifurkationswerte $k \lesssim 10$ der Tangentenbifurkationen der Orbits mit Periode drei

$[^1/_0]^{(1)}$, die aus dem anderen trivialen Fixpunkt folgende mit $[^1/_0]^{(2)}$. Da eine Bahn an verschiedenen Bifurkationen beteiligt ist, trägt sie mehrere Namen.

3.6.3 Das Verfolgen der periodischen Bahnen

Im dreidimensionalen Raum (q, p, k) bilden die periodischen Bahnen Linien. Beim Verfolgen der Bahnen $(q(k), p(k))$ als Funktion von k ist es hilfreich, sich den Tangentenvektor

$$(\dot{q}, \dot{p}) \equiv \left(\frac{dq}{dk}, \frac{dp}{dk} \right) \tag{3.179}$$

an diese Linien zu verschaffen. Dazu differenzieren wir die Fixpunktgleichungen nach k und erhalten das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$(\mathfrak{M}_{11} - 1)\dot{q} + \mathfrak{M}_{12}\dot{p} = -\mathfrak{M}_{13} \, , \tag{3.180}$$

$$\mathfrak{M}_{21}\dot{q} + (\mathfrak{M}_{22} - 1)\dot{p} = -\mathfrak{M}_{23} \tag{3.181}$$

mit den Elementen der erweiterten linearisierten Abbildung $\mathfrak{M}$ (3.177). Interessanterweise ist das Gleichungssystem gerade an den Bifurkationen singulär. Der Tangentenvektor $(\dot{q}, \dot{p}, \dot{k} \equiv 1)$ hat dann nach Normierung eine verschwindende k–Komponente, und es ist sogar erlaubt, in Richtung komplexer Koordinaten p und q fortzuschreiten und dennoch reelles k beizubehalten. Es ist somit ohne weiteres möglich, auch die komplexen Vorläuferlösungen bifurkierender Bahnen, die wir bei der Semiklassik benötigen werden, im komplexifizierten Phasenraum als Funktion reellen k's zu verfolgen.

Als Beispiel betrachten wir die Bahnen aus der Tangentenbifurkation $[^1/_1]_1$ bei $k = 2.45\ldots$. In Abbildung 10 ist aufgezeigt, wie sich die Wirkung, der Stabilitätsfaktor und die Koordinaten als Funktion von k verhalten. Vor der Bifurkation sind dies komplexe Größen, die für die beiden Bahnen zueinander konjugiert sind. Nach der Bifurkation sind sie reell. Direkt an der Bifurkation verhalten sich die Differenzen der klassischen Größen beider Bahnen nach Potenzgesetzen. Diese sind universeller Natur und lassen sich etwa für die Tangentenbifurkation aus den Beziehungen (3.116, 3.117, 3.118) herleiten. Der dort auftretende Bifurkationsparameter ε muß augenscheinlich in glatter und in erster Ordnung linearer Weise von k abhängen.

Die Lage der reellen Bahnen der Längen eins bis drei ist für $k = 1, 2, \ldots, 8$ in Abbildung 11 dargestellt.

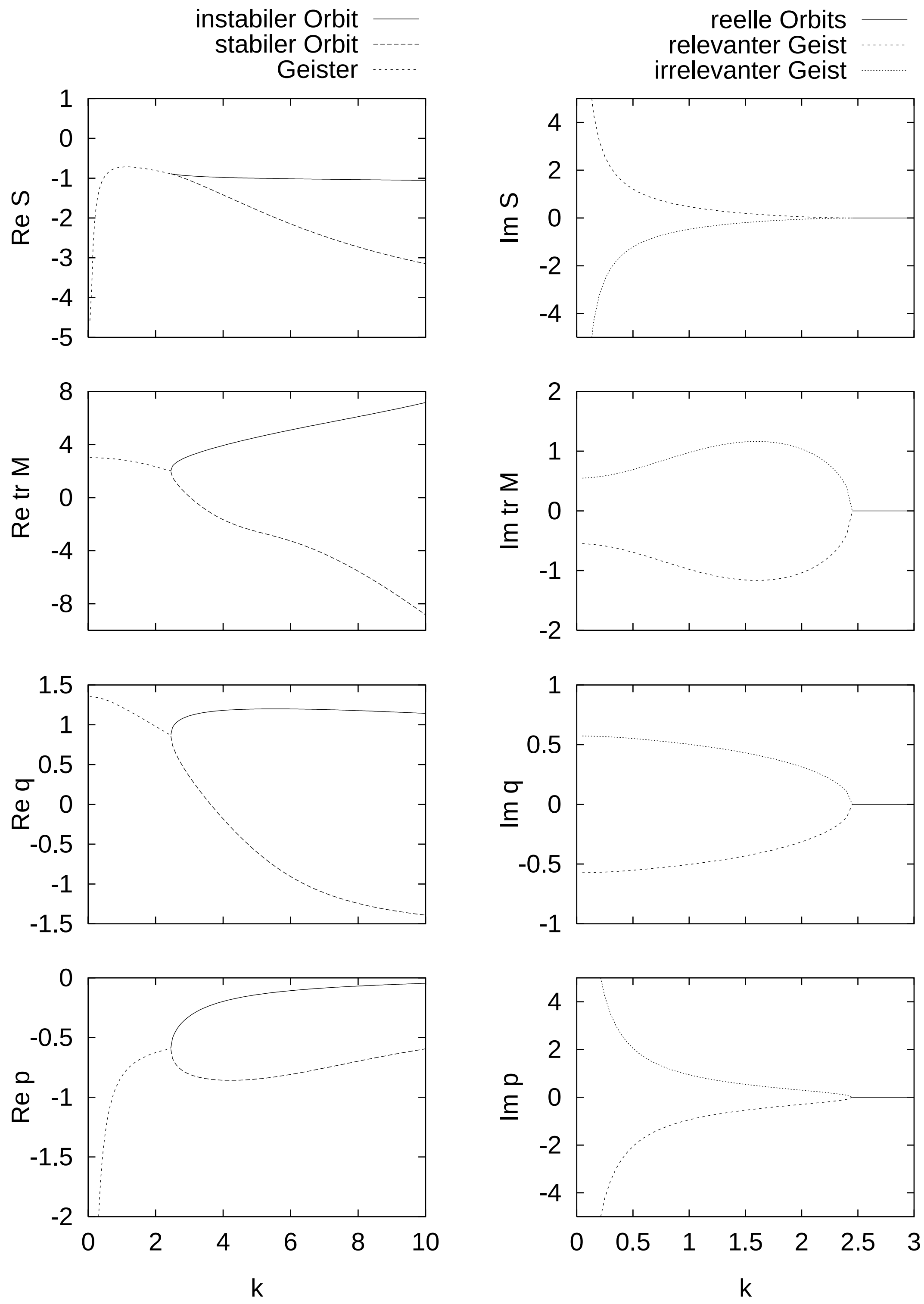


Abbildung 10: Verhalten der Wirkung, des Stabilitätsfaktors und der Koordinaten der an der Bifurkation $[^1/_1]_1$ beteiligten periodischen Bahnen als Funktion der Kopplungsstärke k

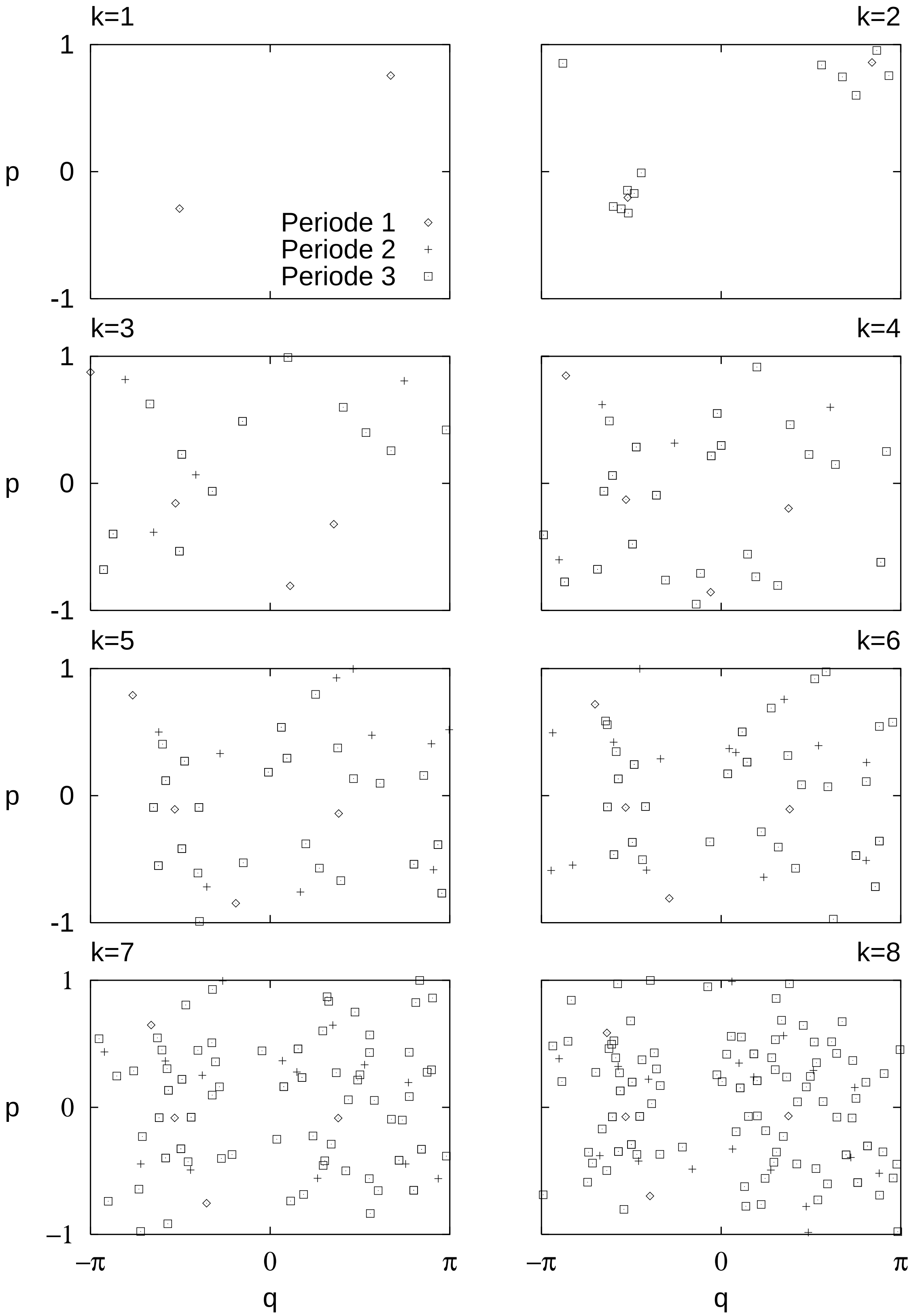


Abbildung 11: Lage der reellen periodischen Bahnen der Längen eins, zwei und drei im Phasenraum für einige Werte von k

4 Die semiklassische Rolle periodischer Bahnen

Die Quasienergien eines quantenmechanischen periodisch getriebenen Systems, d. h. die Phasen der Eigenwerte des Floquetoperators F, können aus den Spuren $\mathrm{tr}\, F^n$ gewonnen werden. Diese wiederum lassen sich mit periodischen Bahnen des klassischen Systems in Verbindung setzen. Stationäre Eigenschaften des Quantensystems werden so mit stationären Eigenschaften des klassischen Systems verknüpft. Hierzu formulieren wir zunächst die Spuren in der Form eines Integrals über den Phasenraum und setzen dort die semiklassische Van–Vleck–Näherung [5–7] des Floquetoperators ein. Dadurch bringen wir die erzeugenden Funktionen ins Spiel. Eine Näherung nach der Methode der stationären Phase führt dann bereits auf die periodischen Bahnen: Semiklassisch setzt sich $\mathrm{tr}\, F^n$ aus Beiträgen der periodischen Bahnen der Periode n zusammen [10–13].

Hintergrund der Näherungsmethode der stationären Phase ist eine Verschiebung der Integrationskontur ins Komplexe — in unserem Fall also eine Komplexifizierung des Phasenraums. In einer mathematisch sauberen Formulierung konstruiert man eine solche Integrationskontur mittels der Methode des stärksten Abklingens des Integranden [41,42]. Auf der neuen Integrationskontur hat der Integrand Maxima an den Punkten stationärer Phase. Aus ihrer Umgebung rühren die hauptsächlichen Beiträge zum Integral her. Die neue Kontur führt in der Regel über weitere Maxima, an denen Ort und Impuls komplexe Größen sind. Sie entsprechen komplexen Geisterlösungen der Fixpunktgleichungen, d. h. komplexen periodischen Bahnen, wie sie schon bei den Normalformen aufgetreten sind. Nicht alle Geister liefern jedoch einen Beitrag, sondern nur solche, die auf oder in der Nähe der neuen Integrationskontur liegen.

Ist eine periodische Bahn hinreichend von allen anderen isoliert, so liefert sie einen additiven Beitrag, dessen Amplitude durch die primitive Periode n_0 sowie den Stabilitätsfaktor $\mathrm{tr}\, M$ und dessen Phase durch die Wirkung S und den Maslovindex ν gegeben ist. Erst der Schritt vom Phasenraumintegral zu den periodischen Bahnen sorgt dafür, daß das Ergebnis nicht von der Wahl der klassischen Beschreibungsweise abhängt — von den periodischen Bahnen fließen nur Eigenschaften ein, die sich unter kanonischen Transformationen nicht ändern, während vorher mit der Erzeugenden eine Größe im Integranden auftritt, die diese schöne Eigenschaft nicht besitzt.

In der Nähe von Bifurkationen liegen Punkte stationärer Phase eng beieinander. Periodische Bahnen können dann nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden, sondern liefern einen kollektiven Beitrag. Hier helfen die Normalformen der Erzeugenden aus Kapitel 3 weiter. Wir geben die Beiträge für die verschiedenen dort diskutierten Bifurkationstypen an. Erneut fließen nur die oben genannten kanonisch invarianten Eigenschaften der periodischen Bahnen ein. Auch die Familie periodischer Bahnen auf einem rationalen Torus eines integrablen Systems trägt kollektiv bei, ebenso die Bahnen auf einem gebrochenen Torus im nahezu integrablen Fall.

4.1 Verknüpfung des Spektrums mit periodischen Bahnen

4.1.1 Spuren und Spektrum des Floquetoperators

Als Ansatzpunkt für die semiklassische Bestimmung des Quasienergiespektrums dienen die Spuren

$$t_n \equiv \mathrm{tr}\, F^n = \sum_{k=1}^{N} \exp\left[-in\varphi_k\right] \tag{4.1}$$

von Potenzen des Floquetoperators. Das Spektrum ist durch die Spuren der Potenzen $1 \leq n \leq N/2$ festgelegt. Der Weg führt über das charakteristische Polynom

$$\det(F - \lambda\hat{\mathbb{1}}) = \sum_{n=0}^{N} a_n(-\lambda)^{N-n} = 0 \ , \tag{4.2}$$

dessen N Wurzeln $\lambda_k = \exp\left[-i\varphi_k\right]$ gerade die Eigenwerte von F sind. Hier gilt unter anderem $a_0 = 1$, $a_1 = t_1$ und $a_N = \det F$. Die Koeffizienten lassen sich aus den Spuren t_n über die Newtonschen Formeln bestimmen [79],

$$n a_n = -(-1)^n t_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}(-1)^k t_k, \quad (1 \leq n \leq N) \ . \tag{4.3}$$

Aus dem angesprochenen Satz Spuren erhält man zunächst nur die Koeffizienten mit Index $n = 1$ bis $n = N/2$. Die zweite Hälfte folgt aus der sogenannten Selbstinversitätsbeziehung [40]

$$a_{N-n} = a_N a_n^* \ , \tag{4.4}$$

die eine Konsequenz der Unitarität von F ist. Die $N/2$ komplexen Größen t_n, $1 \leq n \leq N/2$, bieten also genausoviel Information wie die N reellen Quasienergien φ_k.

Die Spur t_n ist mit der Dynamik über n Perioden hinweg verknüpft. Daß man das System über $N/2$ Perioden verfolgen muß, um das Spektrum zu gewinnen, läßt sich auch auf eine andere Art und Weise verstehen, nämlich in Form einer Energie–Zeit–Unschärferelation $\Delta t \Delta E \approx 2\pi$. Hier hat man als Entschlüsselungsstrategie die Bestimmung der spektralen Zustandsdichte

$$d(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} \delta(\varphi - \varphi_k) \tag{4.5}$$

mittels einer Fourierreihenentwicklung

$$d(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n \exp\left[in\varphi\right] = \frac{N}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cos(n\varphi) \tag{4.6}$$

im Hinterkopf. Wir haben bereits die Unitarität von F über die Beziehung $t_{-n} = t_n^*$ einfließen lassen. Man sieht so der Summe rechts direkt an, daß sie — in Übereinstimmung mit der Definition von $d(\varphi)$ — eine reelle Größe beschreibt. Ferner gilt $\frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} F^0 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \hat{\mathbb{1}} = N/2\pi$. Dieser konstante Untergrundterm zur spektralen Dichte spiegelt wider, daß es N Eigenphasen im Intervall $[0, 2\pi)$ gibt. Ihr mittlerer Abstand ist demgemäß $\overline{\Delta\varphi} = 2\pi/N$.

Wenn wir die Summe über n auf ein endliches Zeitintervall $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}$ beschränken, was in der ursprünglichen Summe dem Intervall $\Delta t = 2n_{\max}+1$ entspricht, erhalten wir anstelle der Deltafunktionen Terme der Form

$$\frac{\sin[(n_{\max} + \frac{1}{2})(\varphi - \varphi_k)]}{\sin[\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_k)]} \ . \tag{4.7}$$

Diese Beiträge haben im Einklang mit der Unschärferelation Peaks der Breite $\Delta\varphi \approx \pi/(n_{\max} + \frac{1}{2})$. Will man individuelle Eigenphasen identifizieren, benötigt man ein Auflösungsvermögen mindestens von der Genauigkeit des mittleren Phasenabstands $\overline{\Delta\varphi}$. Es ergibt sich in der Tat $n_{\max} \approx N/2$.

4.1.2 Die Spuren als Phasenraumintegral

Die Spuren lassen sich in der Form eines Phasenraumintegrals schreiben, welches als Ansatzpunkt für die semiklassische Behandlung von Nutzen sein wird. Der Ausdruck hat die Form

$$\operatorname{tr} F^n = \int dq' \int dp \, \langle q'|F^n|p\rangle\langle p|q'\rangle \ . \tag{4.8}$$

Diese Darstellung erhält man ohne Mühe für Systeme, die durch einen Orts- und einen Impulsoperator mit der Vertauschungsrelation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ beschrieben werden. Ein Basiswechsel ist dort bekanntlich mit einer Fouriertransformation verbunden,

$$\langle p|q\rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} pq\right] \ . \tag{4.9}$$

Bei einem Drehimpulssystem muß dieser Zusammenhang leicht modifiziert werden. Hier geht der klassische Impuls aus dem Operator J_z hervor. Es gibt nun allerdings keinen quantenmechanischen „Winkeloperator“ $\hat{\varphi}$ mit $[\hat{\varphi}, J_z] = i$. Die grundlegende Ursache ist die diskrete Natur der Quantenzahl m. Sie steht im Zusammenhang mit der Tatsache, daß man klassisch Winkel, die sich um Vielfache von 2π unterscheiden, miteinander identifizieren muß. Dies spiegelt sich auch in dem Ausdruck für die Spur wider, zu dessen Herleitung wir nun kommen.

Dazu notiert man die Spur zunächst explizit in der üblichen $|j,m\rangle$–Basis,

$$\mathrm{tr}\, F^n = \sum_{m=-j}^{j} \langle j,m|F^n|j,m\rangle \; . \tag{4.10}$$

Dem angekündigten Resultat nähert man sich nun durch eine Reihe von Umformungen, zu deren Beginn man in

$$\mathrm{tr}\, F^n \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-J}^{J} dm \int_{-J}^{J} dm' \, \langle j,m'|F^n|j,m\rangle \delta(m-k)\delta(m-m') \tag{4.11}$$

(mit erneut $J = j + \frac{1}{2}$) eine Deltafunktion mittels der Poissonschen Summationsformel

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(m-l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left[2\pi i m l\right] \tag{4.12}$$

darstellt und für die andere die Form $\delta(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ipq\right]\, dq$ verwendet. Ist j halbzahlig, so sind es auch die ursprünglichen Stellen in den Summen über m bzw. k. Der Summationsindex l sei aber ganzzahlig. Dies führt wegen

$$\sum_{k=-\infty\ldots-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\ldots\infty} \delta(m-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(m+\frac{1}{2}-l\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left[2\pi i m l\right] \exp\left[i\pi l\right] \tag{4.13}$$

zu zusätzlichen Faktoren $(-1)^l$. Sie können als Ausdruck der Tatsache angesehen werden, daß für halbzahliges j die Drehung um 2π und die damit verbundene Erhöhung des Winkels q einen Vorzeichenwechsel der Wellenfunktion liefert und erst die Erhöhung um 4π der Identitätsoperation entspricht. Diese Deutung erhärtet sich im nächsten Abschnitt. Zur Fallunterscheidung verwenden wir $\sigma_j \equiv \exp[i2\pi j] = \pm 1$. Wir führen zugleich den klassischen Impuls $p = m/J$ ein, der als kontinuierliche Größe aufgefaßt werden soll. Damit erhält man

$$\mathrm{tr}\, F^n \;=\; \int_{-1}^{1} dp \int_{0}^{2\pi} dq' \, \langle p|q'\rangle\langle q'|F^n|p\rangle \tag{4.14}$$

mit den Definitionen

$$\langle q'|F^n|p\rangle \equiv J \int_{-1}^{1} dp' \, \langle q'|p'\rangle\langle j, Jp'|F^n|j, Jp\rangle \tag{4.15}$$

und

$$\langle p|q\rangle \equiv \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp[-iJp(q+2\pi l)]\sigma_j^l\,. \tag{4.16}$$

Die Darstellungen mittels der Größen q und p hängen anscheinend über eine modifizierte Fouriertransformation zusammen. Wir können q daher als den klassischen Ort auffassen. Vergleicht man (4.16) mit (4.9), so erkennt man, daß $1/J$ an die Stelle der Planckschen Konstanten getreten ist. Dies wissen wir bereits aus der Diskussion des klassischen Grenzfalls in Abschnitt 2.2. Die Summe über l führt zu einer kohärenten Überlagerung der quantenmechanischen Amplituden aller q–Werte, die sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Dies gilt sowohl für die Amplituden der Fourierentwicklungen $\langle q'|F^n|p\rangle$ und $\langle p|q\rangle$ als auch letztlich für jene im Phasenraumintegral (4.14).

4.1.3 Semiklassische Matrixelemente

Man kann die Matrixelemente

$$\langle q'|F^n|p\rangle \equiv \psi_p(q',nT) \tag{4.17}$$

wie angedeutet als die Ortsdarstellung einer Wellenfunktion auffassen. Sie geht durch Propagation über n Perioden aus der Anfangsbedingung $\psi_p(q',0) = \langle q'|p\rangle$ hervor. Setzt man den üblichen WKB–Ansatz [7]

$$\psi_p(q',nT) = A(q',p;nT)\exp\left[iJ\hat{S}(q',p;nT)\right] \tag{4.18}$$

in die Schrödingergleichung ein und betrachtet die führende Ordnung in $1/J$, so wird man auf die Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$H\left(q', \frac{\partial \hat{S}}{\partial q'}; t\right) + \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = 0 \tag{4.19}$$

geführt. Dies ist eine partielle Differentialgleichung für $\hat{S}(q',p;t)$ mit der Anfangsbedingung $\hat{S}(q',p;0) = q'p$. Gelöst wird sie durch die erzeugende Funktion der klassischen Dynamik; sie gehorcht also den Gleichungen (3.7). Den Vorfaktor $A(t)$ erhält man aus der nächsten Ordnung der Schrödingergleichung in $1/J$ (oder der Erhaltung der Norm der Wellenfunktion). Es kann mehrere Lösungen des Randwertproblems $q(nT) = q'$, $p(0) = p$ geben. Die verschiedenen Beiträge überlagern sich kohärent, wobei ihre relative Phase durch den Morseindex $\hat{\mu}$ aus Abschnitt 3.1.5 bestimmt wird. Eine Begründung erhalten wir zum Ende des nächsten Abschnitts 4.1.4.

Die daraus folgende semiklassische Näherung der Matrixelemente $\langle q'|F^n|p\rangle$ geht auf Van Vleck und Dirac zurück [5,6] und lautet

$$\langle q'|F^n|p\rangle = \sum_{p \rightsquigarrow q'}^{\text{Wege}} \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 \hat{S}(q',p;n)}{\partial q' \partial p} \right|^{1/2} \exp\left[iJ\hat{S}(q',p;n) - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \right] . \qquad (4.20)$$

Die Summe führt über alle klassischen Trajektorien $(q(t), p(t))$, die den Randbedingungen $p(0) = p$, $q(nT) = q'$ genügen.

Es sei sogleich vermerkt, daß die Amplitude

$$\frac{\partial^2 \hat{S}(q',p;n)}{\partial q' \partial p} = \left. \frac{\partial q}{\partial q'} \right|_p = \frac{1}{M_{11}} \qquad (4.21)$$

gemäß (3.38) auf den Kaustiken von $\hat{S}$ divergiert und die semiklassische Näherung (4.20) dort zusammenbricht.

Der Ausdruck (4.16) für den Entwicklungskoeffizienten

$$\langle q'|p\rangle = \langle q'|U(0;0)|p\rangle \qquad (4.22)$$

kann mit der Identität

$$\langle q'|p\rangle = \sigma_j^l \langle q' |\exp[i2\pi l J_z]| p\rangle \ , \qquad (4.23)$$

die für jede Wellenfunktion gültig ist, ebenfalls in die Form (4.20) gebracht werden. In (4.16) tritt die Überlagerung der Beiträge aller Winkel auf, die klassisch miteinander identifiziert werden müssen. Sie gehen durch eine Drehung bezüglich der z–Achse um Vielfache von 2π ineinander über; im vorliegenden Fall ist $q' = q - 2\pi l$. In Abschnitt 3.1.2 haben wir im Rahmen des Beitrags (3.22) einer reinen Drehung um die y–Achse zur Wirkung gesehen, daß die zugehörigen Funktionszweige der Wirkung den Wert $S = S(q,q) = 2\pi l$ tragen. Dieser Ausdruck entspricht der Wirkung einer periodischen Bahn und ist somit eine kanonische Invariante, die auch von der Drehachse nicht abhängt. Nach einer Legendretransformation ist folglich für die Drehung um die z–Achse

$$\hat{S}(q',p) = (q' + 2\pi l)p + 2\pi l \, . \qquad (4.24)$$

Während der Drehung trifft man auf zwei Kaustiken und erhält $\hat{\mu} = l$. In der Kombination

$$JS - \frac{\pi}{2}\hat{\mu} = J(q' + 2\pi l)p + j2\pi l \qquad (4.25)$$

kristallisiert sich dann (4.16) einschließlich des Phasenfaktors σ_j^l heraus. Man vergleiche auch die verwandten Diskussionen in Abschnitt 3.2 und 5.4.1.

Auch andere Matrixelemente lassen sich in ähnlicher Weise semiklassisch nähern. Der Wechsel von einer Darstellung zu einer anderen gelingt mittels einer Näherung nach der Methode der stationären Phase. Betrachten wir etwa das Orts–Orts–Matrixelement

$$\begin{aligned}
\langle q'|F^n|q\rangle &= \int \langle q'|F^n|p\rangle\langle p|q\rangle\, dp \\
&= \int \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p\rightsquigarrow q'}^{\text{Wege}} \frac{J}{2\pi} \left| \frac{\partial^2 \hat{S}(q',p;n)}{\partial q' \partial p} \right|^{1/2} \\
&\quad \times \exp\left[iJ\left(\hat{S}(q',p;n) - (q+2\pi l)p\right) - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu}\right] dp \\
&= \sum_{\text{Punkte}}^{\text{stationäre}} \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 \hat{S}(q',p;n)}{\partial q' \partial p} \frac{1}{\hat{S}''} \right|^{1/2} \\
&\quad \times \exp\left[iJ\left(\hat{S}(q',p;n) - (q+2\pi l)p\right) - i\frac{\pi}{2}\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\hat{S}''\right)\right] . \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Die Punkte stationärer Phase erfüllen

$$\frac{\partial \hat{S}(q',p;n)}{\partial p} \bmod 2\pi = q \,. \qquad (4.27)$$

Dies legt p (und l) als Funktion von q und q' fest und macht aus der Summe über stationäre Punkte wieder eine Summe über klassische Trajektorien, die nun den Randbedingungen $q(0) = q$, $q(nT) = q'$ genügen. In die Amplitude und die neue Phase geht weiter die zweite Ableitung [siehe (3.29)]

$$\hat{S}'' \equiv \frac{\partial^2 \hat{S}(q',p;n)}{\partial p^2} = -\frac{M_{12}^{(n)}}{M_{11}^{(n)}} \qquad (4.28)$$

der Phase ein. Im Resultat

$$\langle q'|F^n|q\rangle = \sum_{q\rightsquigarrow q'}^{\text{Wege}} \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 \tilde{S}(q',q;n)}{\partial q' \partial q} \right|^{1/2} \exp\left[iJ\tilde{S}(q',q;n) - i\frac{\pi}{2}\tilde{\mu}\right] \qquad (4.29)$$

taucht im Vergleich zum Ausdruck (4.20) nun konsequenterweise die Erzeugende $\tilde{S}$ statt $\hat{S}$ auf, und in der Phase identifiziert man den Morseindex $\tilde{\mu}$ mittels der Beziehung (3.40). Den Beitrag $2\pi lp$ haben wir mit in $\tilde{S}$ hereingenommen, damit q im Intervall $[0, 2\pi)$ verbleibt. Wir haben auch den Faktor $(-1)^l$ für halbzahliges j unterschlagen, der wie zuvor diskutiert letztlich ebenfalls in der Wirkung und dem Morseindex aufgeht.

Durch eine analoge Rechnung erhält man

$$\langle p'|F^n|p\rangle = \sum_{p\rightsquigarrow p'}^{\text{Wege}} \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \left|\frac{\partial^2 \bar{S}(p',p;n)}{\partial p' \partial p}\right|^{1/2} \exp\left[iJ\bar{S}(p',p;n) - i\frac{\pi}{2}\bar{\mu}\right] . \tag{4.30}$$

Auf dieser Form beruht die erfolgreiche Bestimmung der Kreiselniveaus in [25].

4.1.4 Der zusammengesetzte Propagator

Wir wollen nun skizzieren, wie sich der Propagator semiklassisch zusammensetzt, wenn wir die Propagation mittels der Halbgruppeneigenschaft

$$U(t'';t) = U(t'';t')U(t';t) \equiv U^{(2)}U^{(1)} \tag{4.31}$$

in zwei Teilschritte zerlegen. Dazu verwenden wir erneut die Methode der stationären Phase. Auf diese Weise kann man etwa den Floquetoperator F des Kreisels aus den Teilschritten $\tilde{F}_i$ zusammensetzen, gleichfalls seine Potenzen F^n iterativ aus den Teilschritten F. Insgesamt vertieft die folgende Diskussion das Verständnis der Van Vleckschen Näherung ungemein.

Ein Matrixelement des zusammengesetzten Propagators lautet

$$\langle q''|U|p\rangle = \int \langle q''|U^{(2)}|q'\rangle\langle q'|U^{(1)}|p\rangle \, dq' . \tag{4.32}$$

Nun setzen wir (4.20) und (4.29) in (4.32) ein und führen eine Näherung nach der Methode der stationären Phase durch,

$$\begin{aligned}\langle q''|U|p\rangle &= \sum_{\text{Punkte}}^{\text{stationäre}} \sqrt{\frac{J}{2\pi}} \left|M_{11}^{(1)} M_{12}^{(2)} S''\right|^{-1/2} \\ &\quad \times \exp\left[iJ\left[\hat{S}^{(1)}(q',p) + \tilde{S}^{(2)}(q'',q')\right] - i\frac{\pi}{2}\left(\hat{\mu}^{(1)} + \tilde{\mu}^{(2)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\, S''\right)\right] .\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Punkte stationärer Phase erfüllen

$$\frac{\partial \hat{S}^{(1)}(q',p)}{\partial q'} + \frac{\partial \tilde{S}^{(2)}(q'',q')}{\partial q'} = 0 . \tag{4.34}$$

Dies legt q' als Funktion von q'' und p fest. Es verbleibt also eine Summe über Wege, die den Randbedingungen $p(t) = p$, $q(t'') = q''$ genügen. Um den Beitrag der Wege zu bestimmen, benötigen wir die zweite Ableitung

$$S'' \equiv \frac{\partial^2 \hat{S}^{(1)}(q',p)}{\partial q'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}^{(2)}(q'',q')}{\partial q'^2} \tag{4.35}$$

der Phase. Sie läßt sich wie folgt bestimmen: Wir setzen in (4.34) $q'(q'', p)$ ein und leiten nach q'' ab,

$$S'' \left.\frac{\partial q'}{\partial q''}\right|_p + \frac{\partial^2 \tilde{S}^{(2)}}{\partial q'' \partial q'} = 0 \, . \tag{4.36}$$

Wir benutzen

$$\left.\frac{\partial q'}{\partial q''}\right|_p = \left.\frac{\partial q'}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial q}{\partial q''}\right|_p \tag{4.37}$$

und erhalten unter Verwendung der Beziehungen (3.29)

$$S'' = \frac{M_{11}}{M_{11}^{(1)} M_{12}^{(2)}} \, . \tag{4.38}$$

Dies kann nun in (4.33) eingesetzt werden. Im Endresultat wird man wieder auf (4.20) geführt. Damit setzen sich Amplitude und Phase der semiklassischen Beiträge gemäß den Regeln zusammen, die wir für die linearisierte Abbildung (3.26), den Wert der Erzeugenden (3.5, 3.8) und den Morseindex (3.44) kennengelernt haben.

Eine weitere Anwendung ist, F iterativ aus Propagatoren über kurze Zeiten zusammenzusetzen. Da schon der Ausdruck für beliebig kurze Zeiten (4.16, 4.22) nach der Diskussion des vorigen Abschnitts in die semiklassische Form (4.20) gebracht werden kann, läßt sich dadurch letztere Beziehung einschließlich des postulierten Zusammenhangs zwischen der Phase und dem Morseindex belegen.

4.1.5 Semiklassische Spuren und periodische Bahnen

Setzt man die Van Vlecksche Näherung (4.20) des Propagators in das Phasenraumintegral (4.14) ein,

$$\mathrm{tr}\, F^n = \sum_{\text{von } \hat{S}}^{\text{Zweige}} \int \frac{dq'\, dp}{2\pi/J} \left| \frac{\partial^2 \hat{S}(q', p; n)}{\partial q' \partial p} \right|^{1/2} \exp\left[iJ \left(\hat{S}(q', p; n) - q'p \right) - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \right] \, , \tag{4.39}$$

wobei die Zweige auch die Summe über l umfassen, so ist der erhaltene Ausdruck erneut der Methode der stationären Phase zugänglich. Die Hauptbeiträge zum Integral kommen demnach aus der Umgebung jener Punkte, an denen

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial p} = q' \, , \qquad \frac{\partial \hat{S}}{\partial q'} = p \, , \tag{4.40}$$

gilt, an denen also die Fixpunktgleichungen (3.19) erfüllt sind: Die Punkte stationärer Phase sind die Phasenraumtrajektorien der periodischen Bahnen der Länge n. Es ist befriedigend, daß so die stationären Eigenschaften des quantenmechanischen Systems, letztlich beschrieben durch die Quasienergien, mit jenen des klassischen Systems verbunden sind. Insbesondere leben auf den Phasenraumtrajektorien der periodischen Bahnen sogenannte invariante Maße. Da wir mit einem Integral über den Phasenraum gestartet sind, ist das Auftreten solcher Maße in der Folge nicht weiter verwunderlich.

Bevor wir die Form der Beiträge aus den Umgebungen der periodischen Bahnen genauer analysieren, kehren wir kurz zum Ausdruck (4.6) für die spektrale Dichte zurück, um uns einer beliebten Sichtweise der Rolle periodischer Bahnen anzuschließen.

Demnach ist die mittlere Dichte der Quasienergien über deren Zahl $N = \operatorname{tr} \hat{\mathbb{1}} = \operatorname{tr} F^0$ gegeben, also gewissermaßen durch die periodischen Bahnen der Länge Null. Jeder Punkt im Phasenraum ist eine solche periodische Bahn. Setzt man $\hat{S}(q', p; 0) = q'p$ in das Phasenraumintegral (4.14) ein [in dem in diesem Fall nur der Term mit $l = 0$ aus (4.16) beiträgt], so erhält man die wohlbekannte *Weylsche Regel*

$$N = \frac{\Omega}{2\pi/J} , \tag{4.41}$$

die die Zahl der Zustände mit der Fläche Ω des Phasenraums in Verbindung setzt: Im Mittel liegt in jedem Kästchen des Flächeninhalts $2\pi/J$ ein quantenmechanischer Zustand. Beim Kreisel ist der Phasenraum die Einheitskugel und $\Omega = 4\pi$. Die Weylsche Regel sagt also $2J = 2j + 1$ Zustände voraus und ist mithin exakt.

Die Weylsche Regel gilt unabhängig von der konkreten Dynamik des Systems; sie ist *universeller* Natur. Die verbleibenden Terme in (4.6) beschreiben die systemspezifischen Fluktuationen im Spektrum, d. h. die exakte Lage der Quasienergieniveaus; sie werden durch die periodischen Bahnen nichtverschwindender Länge bestimmt. Auch hier gibt es universelle statistische Eigenschaften, die von der bloßen Natur der klassischen Dynamik abhängen und etwa semiklassisch begründet werden können. Für chaotische Systeme sind sie durch die Zufallsmatrixtheorie zugänglich [21,52–54].

4.1.6 Die Methode des stärksten Abklingens und Geisterbahnen

Die Näherungsmethode der stationären Phase ist eine Spielart allgemeinerer Techniken, die in der Theorie der asymptotischen Entwicklung von Integralen mit stark veränderlichem Integranden verbreitete Anwendung finden [41,42]. Auch unser Integral (4.39) ist von diesem Typ. Wir interessieren uns für den führenden (kanonisch invarianten) Term der asymptotischen Entwicklung für $J \to \infty$ und bedienen uns der Technik des stärksten Abklingens des Integranden. Dabei setzt man den Integranden analytisch ins Komplexe fort und deformiert die ursprüngliche Integrationsmannigfaltigkeit so, daß die Maxima des Betrags des Integranden an den Punkten stationärer Phase liegen. Dort liegen zugleich in allgemeinerer Sprechweise *Sättel* des Integranden. Der Betrag des Integranden soll weiter auf schnellstmögliche Weise fallen, wenn man sich von den Sätteln wegbewegt. Die Deformation der Kontur soll kontinuierlich geschehen, und es sollen keine Singularitäten überschritten werden, damit der Wert des Integrals unberührt bleibt.

Man endet so mit einer Integrationskontur, die die ursprünglichen Integrationsgrenzen miteinander verbindet. Sie zerfällt in Teilgebiete, auf denen die Phase $\mathrm{Re}(\hat{S} - q'p)$ des Integranden konstant ist. Auf jedem Gebiet liegt in der Regel genau ein Maximum. (Mehrere Maxima kann es nur geben, wenn der Realteil der Wirkung verschiedener Sättel übereinstimmt.) Die einzelnen Gebiete stoßen an den Nullstellen des Integrand zusammen, an denen ja auch die Phase nicht wohldefiniert ist. Den führenden Term der beschriebenen asymptotischen Entwicklung erhält man nun, indem man sich auf die Beiträge aus den Umgebungen der Maxima des Integranden beschränkt.

Die Integrationsvariablen nehmen auf der neuen Kontur komplexe Werte an. Dies entspricht in unserem Fall einem komplexifizierten Phasenraum. In der Regel führt die neue Kontur nicht nur über die ursprünglichen Punkte stationärer Phase, sondern hat weitere Maxima an Sattelpunkten mit komplexen Koordinaten. Dort sind die analytisch fortgesetzten Fixpunktgleichungen erfüllt. Man nennt diese Lösungen *Geister*bahnen, da ihnen keine klassische Bedeutung zukommt. Sie haben wir bereits in Kapitel 3 kennengelernt.

Mit der skizzierten Konstruktionsvorschrift für die neue Integrationskontur werden aber nicht alle Geisterlösungen erfaßt. Letztlich kann nur die Konstruktion der Kontur über die Relevanz eines Geistes Aufschluß geben. In der Regel tragen vor allem solche Geister bei, deren Koordinaten beinahe reell sind. Sie treten insbesondere in der Nähe von Bifurkationen auf, und zwar als Vorläufer von Bahnen, die erst jenseits der Bifurkation im (reellen) klassischen System sichtbar werden. Wie wir weiter unten sehen werden, wird man zuweilen auch Geister berücksichtigen, die nicht nicht direkt auf der Integrationskontur stärksten Abklingens liegen, aber doch noch hinreichend in ihrer Nähe; dies geschieht etwa für moderates J oder eben in der Nähe von Bifurkationen.

Die Wirkung und der Stabilitätsfaktor von Geistern sind meist komplexe Größen. Ihr Verhalten in der Nähe einer Bifurkation ist etwa den Eigenschaften der komplexen Lösungen aus den Birkhoffschen Normalformen anzusehen. (Es ergibt sich etwa nach den Abschnitten 3.4.4 und 3.4.6, daß Geister aus Periodenverdopplungen und Periodenvervierfachungen als Ausnahmen reelle charakteristische Größen besitzen.)

Die Methode des stärksten Abklingens werden wir auch bei der numerischen Berechnung mancher Integrale heranziehen. Für Beispiele verschobener Konturen verweisen wir auf die Abschnitte 4.6.2 (Abb. 12) und 4.8 (Abb. 13).

Im Falle des Kreisels gelingt die analytische Fortsetzung der stroboskopischen Abbildung am einfachsten ausgehend von (2.17, 2.18) mit komplexen kartesischen Koordinaten $\mathbf{X}$. Auch nach der Komplexifizierung gilt $\mathbf{X}^2 = 1$. Als Impuls verwendet man weiterhin $p = Z$; als Ort fungiert $q = \arg \frac{X+iY}{\sqrt{1-Z^2}}$. Die Wurzel im Nenner führt zu zwei Verzweigungsschnitten entlang der reellen p–Achse von $-\infty$ nach -1 und von 1 nach $+\infty$. Diese Schnitte sind bei der Konstruktion der Integrationskontur zu beachten. Der analytisch fortgesetzte Stabilitätsfaktor ergibt sich durch Einsetzen der komplexen

Koordinaten in die Stabilitätsmatrix (3.28). Für die Wirkung erhält man von jeder Drehung um die y–Achse aus (3.22) den Beitrag

$$S_y = \frac{i}{2}\left(\log\frac{YZ'+iX'}{YZ'-iX'} - \log\frac{YZ+iX}{YZ-iX}\right) . \tag{4.42}$$

Die ungestrichenen und gestrichenen Größen bezeichnen die Koordinaten vor und nach der Drehung; dabei gilt $Y = Y'$. Die nichtlinearen Drehungen um die z–Achse liefern unverändert Beiträge der Form (3.23).

Der Maslovindex eines Geistes läßt sich als reelle, aber nicht mehr ganzzahlige Größe auffassen. Wie der Morseindex setzt er sich semiklassisch aus den Phasen der nun komplexwertigen zweiten Ableitungen bei einer Näherung der stationären Phase zusammen. Um die richtigen Phasen zu erhalten, schreibt man zunächst alle Formeln aus den Abschnitten 3.1.5 und 3.1.6 so, daß man Beiträge der Form $\operatorname{sign} x$ oder $-\operatorname{sign} x$ erhält, multipliziert also alle Vorzeichen vor den sign–Funktionen aus. Nun ersetzt man überall $-\operatorname{sign}(x)$ durch $-\frac{2}{\pi}\arg(i/x)$ und $\operatorname{sign}(x)$ durch $\frac{2}{\pi}\arg(ix)$. Man beachte, daß $-\arg(-ix) = \arg(ix)$ nur für reelles x gilt. Es gilt aber generell $\arg(ix) = -\arg(-i/x)$. So übersetzt sich etwa Formel (3.42) in

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}^{(2)} + \bar{\mu}^{(1)} + \frac{1}{\pi}\arg i\frac{M_{21}}{M_{21}^{(2)}M_{21}^{(1)}} . \tag{4.43}$$

In (3.50) tritt jedes Matrixelement M_{21} zweimal auf, und zwar so, daß

$$\nu - \frac{1}{\pi}\arg(2 - \operatorname{tr} M^{(n)}) \tag{4.44}$$

ganzzahlig ist.

4.2 Vorbemerkungen zu den Beiträgen periodischer Bahnen zur Spur

Nach der im vorigen Abschnitt erläuterten Methode des stärksten Abklingens erhält man von jedem Gebiet $\mathfrak{U}$, in dem periodische Bahnen und gegebenenfalls Geister der Periode n leben, einen additiven Beitrag $\mathfrak{I}_{\mathfrak{U}}$ zur Spur von F^n. Die semiklassische Näherung hat also die grobe Gestalt

$$\operatorname{tr} F^n = \sum_{\mathfrak{U}} \mathfrak{I}_{\mathfrak{U}} . \tag{4.45}$$

Wir werden die Erzeugende $\hat{S}$ in der Umgebung der periodischen Bahnen entwickeln und Beiträge erhalten, in die nur die kanonisch invarianten Eigenschaften der Bahnen einfließen. Die konkrete Form der Beiträge hängt davon ab, wieviele periodische Bahnen typischerweise in einem Gebiet schwach veränderlicher Phase liegen und welche Konfiguration man dabei antrifft. Hier kommt es wiederum auf die Natur der klassischen Dynamik an. In integrablen Systemen bilden die periodischen Bahnen Familien. In nichtintegrablen Systemen treten sie punktweise auf. Unser Ziel ist es, für den gesamten Übergang von regulärem zu chaotischem Verhalten eine verläßliche semiklassische Näherung zu finden. Mathematisch gesprochen suchen wir einen asymptotischen Ausdruck, der das Verhalten des exakten Ergebnisses für $J \to \infty$ *gleichförmig* in der Kopplungsstärke k beschreibt.

Das Maß an Veränderung des Integranden in (4.39) ist durch den Wirkungsunterschied in Einheiten der Planckschen Konstanten gegeben, also durch die typische Größenordnung von $J\Delta S$. Zwei im Phasenraum benachbarte Bahnen sind hinreichend isoliert, wenn dieses Abstandsmaß mindestens von der Größenordnung eins ist. Es sei daran erinnert, daß wir zwar den semiklassischen Grenzfall $J \to \infty$ betrachten, für die Gewinnung der Quasienergien aber auch die Dynamik über immer längere stroboskopische Zeiten bis $n \approx J$ verfolgen müssen. Damit wird zwar die typische Wirkungsdifferenz zweier Bahnen gegebener Länge mit wachsendem J immer größer, die skalierte Wirkungsdifferenz der hinzukommenden Bahnen größerer Periode kann jedoch sehr wohl klein sein. Das genaue Wechselspiel dieser Grenzfälle $J, n \to \infty$ ist noch längst nicht verstanden; in der Literatur finden sich nur Ansätze [80,81].

Bei hyperbolischen Systemen steigt die Zahl der periodischen Bahnen mit der Periode exponentiell an. Damit rücken die Bahnen im Phasenraum immer enger aneinander. Dennoch lassen sich die Bahnen der Periode $n < J$ nach aller Erfahrung als isoliert betrachten, da die Erzeugende an sich eine stark fluktuierende Funktion ist.

In Systemen mit gemischtem Phasenraum liegen die periodischen Bahnen häufig in so enger Nachbarschaft zueinander, daß der Bereich stationären Verhaltens des Integranden mehrere Bahnen erfaßt. Insbesondere die Wirkungsdifferenz von beinahe bifurkierenden Bahnen ist klein. Auch die Zahl der Bifurkationen in einem gegebenen Intervall der Kopplungsstärke wächst exponentiell mit der Periode. (Die metrische Entropie und die damit verbundene topologische Entropie läßt sich mit der Torsionsstärke zu $\ln k$ abschätzen, es gibt also in der Größenordnung von k^n Bahnen der Periode n, die abgesehen von den Nachfolgern der trivialen Bahnen bei $k = 0$ alle durch Bifurkationen entstanden sein müssen.) Und insbesondere Kaskaden von Bifurkationen führen zu immer komplexeren Anhäufungen. Es stellt sich heraus, daß man in der Regel die Beiträge eng benachbarter periodischer Bahnen nicht mehr trennen kann, sondern vielmehr Beiträge kollektiver Natur erhält. Wir nennen eine Menge eng benachbarter periodischer Bahnen einen *Cluster*. Dabei treten auch die bereits erwähnten Geisterbahnen auf, welche hier Vorläufer periodischer Bahnen sind, die erst jenseits der Bifurkation als reelle Lösungen der Fixpunktgleichungen sichtbar werden. In den Beitrag eines Clusters gehen die Eigenschaften aller beteiligten Bahnen ein.

4.3 Der Beitrag isolierter periodischer Bahnen

In hyperbolischen Systemen sind die periodischen Bahnen hinreichend isoliert, so daß es ausreicht, die Erzeugende in der Phase des Integranden von (4.39) in zweiter Ordnung zu entwickeln und die semiklassische Amplitude als Konstante vor das Integral zu ziehen. Die Entwicklung der Erzeugenden lautet

$$\hat{S}(q', p; n) - q'p = S + \frac{1}{2}(G_{11}q'^2 + G_{22}p^2 + 2G_{12}pq') + \mathcal{O}(p^{3-k}q'^k) \; . \tag{4.46}$$

Wir haben die periodische Bahn in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Der führende Term ist unter Benutzung von (3.20) die Wirkung der periodischen Bahn. Die Matrix G der zweiten Ableitungen der Erzeugenden ist in (3.48) gegeben. Setzt man die Entwicklung in das Phasenraumintegral ein, verbleibt ein Gaußsches Integral. Zu dessen Auswertung benötigen wir

$$\det G = \frac{2 - \operatorname{tr} M^{(n)}}{M_{11}^{(n)}} \; . \tag{4.47}$$

Für eine periodische Bahn der primitiven Periode n_0 gibt es n_0 Punkte stationärer Phase, die alle den gleichen Beitrag liefern. Für den Beitrag einer isolierten periodischen Bahn erhält man dann mit (3.47) und (3.48)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(\mathrm{isol})} &= n_0 \left| \frac{\partial^2 \hat{S}(q', p; n)}{\partial q' \partial p} \det G \right|^{-1/2} \exp\left[iJS - i\frac{\pi}{2}\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\operatorname{sign} G\right)\right] \\ &= A \exp\left[iJS - i\frac{\pi}{2}\nu \right] \; . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Die semiklassische Amplitude

$$A \equiv \frac{n_0}{\sqrt{|2 - \operatorname{tr} M^{(n)}|}} \tag{4.49}$$

ist durch den Stabilitätsfaktor $\operatorname{tr} M^{(n)}$ aus Abschnitt 3.1.4 und die primitive Periode gegeben, in die Phase gehen die Wirkung S aus Abschnitt 3.1.2 und der Maslovindex ν aus Abschnitt 3.1.6 ein. Sonst treten keine weiteren Größen auf. Der Beitrag ist damit invariant unter kanonischen Transformationen. Dies gilt auch für die weiter unten hergeleiteten Beiträge nicht hinreichend isolierter periodischer Bahnen, da in sie ebenfalls nur die genannten Größen einfließen.

4.4 Isolierte Geister und Stokesübergänge

Der Beitrag eines isolierten Geistes auf der Integrationskontur ist genau von der Form (4.48). Da $2-\mathrm{tr}\, M$ nun jedoch eine komplexe Größe ist, kommt zum Maslovindex noch eine weitere Phase $\frac{1}{2}\arg(2-\mathrm{tr}\, M)$ hinzu. In diesem Ausdruck ist nicht klar, welchen Funktionszweig der arg–Funktion man nehmen muß. Eine eindeutige Rechenvorschrift erhält man, wenn man den Maslovindex gemäß (3.50) berechnet, wobei man in der Formel überall $-\,\mathrm{sign}(x)$ durch $-\frac{2}{\pi}\arg(i/x)$ und $\mathrm{sign}(x)$ durch $\frac{2}{\pi}\arg(ix)$ ersetzt. Dann muß man in (4.49) weiterhin die Betragsstriche beibehalten.

Die Beiträge isolierter Geister werden für wachsendes J exponentiell wie $e^{-J\,\mathrm{Im}\, S}$ unterdrückt. Für gegebenes J findet man jedoch häufig Geister, für die der Imaginärteil der Wirkung klein und deren Beitrag somit wichtig ist.

Wie in Abschnitt 4.1.6 bereits erwähnt kann es auch vorkommen, daß ein Geist sehr nahe an der deformierten Integrationsfläche liegt und nicht vernachlässigt werden kann. Sein Beitrag erfährt jedoch im Vergleich zu einem Geist auf der Integrationsfläche eine Unterdrückung. Dem zugrundeliegenden Mechanismus wenden wir uns nun zu.

Wir steuern das System mit einem Kontrollparameter k und untersuchen, wie ein Geist, der ursprünglich auf der Integrationskontur liegt, von ihr wegwandern kann. Man nennt dies einen Stokesübergang [44,45]. Er tritt auf, wenn die Integrationsgebiete zweier Bahnen $\pm$ für einen bestimmten Wert von $k = k_0$ aufeinanderfallen. Der Realteil der Wirkungen der Bahnen stimmt dann überein, $\mathrm{Re}\, S_+ = \mathrm{Re}\, S_-$. Wir wählen die Bezeichnung so, daß $\mathrm{Im}\, S_+ < \mathrm{Im}\, S_-$ gilt. Die Bahn $+$ nennt man auch dominant. Da sich die beiden Bahnen im Phasenraum nicht treffen, sondern nur die Integrationsgebiete aufeinanderfallen, spricht man von einer globalen Bifurkation. Auf den beiden Seiten des Stokesüberganges verbinden die Integrationsgebiete verschiedene Nullstellenmannigfaltigkeiten des Integranden. Dies führt im allgemeinen dazu, daß jenseits des Stokesüberganges das Gebiet, auf dem die Bahn $-$ liegt, nicht mehr benötigt wird, um die Integrationsgrenzen zu verbinden. Diese Bahn liefert dann in führender Ordnung in $J \to \infty$ keinen Beitrag mehr. Es scheint dann so, als ob der Beitrag schlagartig abgeschaltet wird,

$$\mathcal{I}^{(\mathrm{isol})}_{\mathrm{Stokes}} = \Theta(\varepsilon) A \exp\left[iJS - i\frac{\pi}{2}\nu\right] \tag{4.50}$$

mit $\varepsilon > 0$ auf der Seite, auf der der Geist beiträgt, und $\varepsilon < 0$ auf der anderen. Für gegebenes, endliches J wird man selbstverständlich eine sanfte Unterdrückung des Beitrags erwarten. Um sie herzuleiten, muß man sich der mächtigsten Methoden aus der Theorie der asymptotischen Entwicklungen bedienen. Berry [44] sucht zunächst die vollständige asymptotische Entwicklung in $1/J$ auf und resummiert dann den formal divergierenden Schwanz der Beiträge höherer Ordnung. Dies führt auf

$$\mathcal{I}^{(\mathrm{isol})}_{\mathrm{Stokes}} = \mathcal{S}(s) A \exp\left[iJS - i\frac{\pi}{2}\nu\right] \ . \tag{4.51}$$

Im sogenannten *Stokesfaktor*

$$\mathcal{S}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s} dz \, \exp\left[-z^2\right] \tag{4.52}$$

erkennt man ein Gaußsches Fehlerintegral, in dem die Integrationsgrenze durch den *Stokesparameter*

$$s = \mathrm{sign}(\varepsilon)\sqrt{J}\,\frac{\mathrm{Re}\,|S_+ - S_-|}{\sqrt{2\,\mathrm{Im}\,(S_- - S_+)}} \tag{4.53}$$

festgelegt ist. Diesseits des Stokesüberganges ist $s > 0$ und damit die Integrationsgrenze in (4.52) positiv. Für $J \to \infty$ geht sie nach $+\infty$ und der Stokesfaktor nach eins. Jenseits des Übergangs ist $s < 0$, und der Stokesfaktor verschwindet für $J \to \infty$. Für betragsmäßig großes s ist $\mathcal{S}(s) - \Theta(s) = \mathcal{O}(J^{-1/2})$. Der Ausdruck (4.51) hat auch sehr nahe des Übergangs seine Gültigkeit und beschreibt insgesamt das asymptotische Verhalten im semiklassischen Grenzfall gleichförmig in k.

4.5 Kollektive Beiträge bifurkierender Bahnen

Um den Beitrag einer isolierten periodischen Bahn zu berechnen, haben wir die Phase des Integranden in (4.39) um den Punkt stationärer Phase entwickelt und sind dabei bis zur zweiten Ordnung in den Koordinaten gegangen. Die Amplitude haben wir als Konstante vor das Integral gezogen, für sie haben wir also nur den führenden Term einer Entwicklung in den Koordinaten behalten. Damit verblieb eine kleine Zahl von Koeffizienten, in denen nur die kanonisch invarianten Eigenschaften der periodischen Bahn auftraten.

Man könnte auch mit dem vollen Ausdruck für die Erzeugende starten und Terme höherer Ordnung durch kanonische Transformationen wegzuschaffen versuchen. Aus Kapitel 3 wissen wir, daß dies nur solange gut geht, wie man sich nicht in der Nähe von Resonanzen befindet, nicht also etwa in der Nähe von Bifurkationen, bei denen ja mehrere Bahnen in enger Nachbarschaft zueinander liegen. Wir müssen sonst mit einer lokalen Form der Erzeugenden arbeiten, in der Terme höherer Ordnung in den Koordinaten auftreten und die dabei zwangsläufig weitere periodischen Bahnen mitbeschreibt. Dazu werden wir entsprechend der vorgefundenen Konfiguration der periodischen Bahnen die passende Birkhoffsche Normalform heranziehen.

Betrachten wir die Amplitude

$$A(q', p) \equiv \left| \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial q' \partial p} \right|^{1/2} \tag{4.54}$$

im Integranden von (4.39) in der Umgebung der periodischen Bahnen als unveränderlich, so können wir sie wieder als Konstante vor das Integral (4.39) ziehen. Drücken wir ferner die Koeffizienten der Normalform durch die bekannten kanonisch invarianten Charakteristika der periodischen Bahnen aus, so erhalten wir für jede Bifurkation die sogenannte *lokale Näherung* des kollektiven Beitrags der beteiligten Bahnen [30,36]. Die einzelnen Ausdrücke hängen vom jeweiligen Bifurkationstyp ab.

Auch in der Amplitude $A(q', p)$ können aber Koordinatenabhängigkeiten zurückbleiben, die man durch Transformationen nicht mehr wegschaffen kann. Dadurch löst man sich von den in Kapitel 3 diskutierten Beziehungen zwischen den Stabilitätsfaktoren, die zwar aus den Birkhoffschen Normalformen folgen, jedoch in einiger Entfernung von der betrachteten Bifurkation zusammenbrechen. Wir haben für die Tangentenbifurkation bereits gesehen, wie sich dies mittels der Einbeziehung höherer Terme der Störungsentwicklung behandeln läßt (Abschnitt 3.4.3). Mit dieser Technik läßt sich auch eine *Normalform der Amplitude* herleiten.

Die verbleibenden Koeffizienten in der Amplitude lassen sich ebenfalls durch die kanonisch invarianten Größen ausdrücken. Man erhält dann die *gleichförmige Näherung* des kollektiven Beitrags der an einer Bifurkation beteiligten Bahn. Sie ist auch in weiterer Entfernung zur Bifurkation gültig und zerfällt asymptotisch für $J \to \infty$ in die isolierten Beiträge (4.48) der Bahnen. Sie stellt eine gleichmäßige Beschreibung zweier einander widersprechender Grenzübergänge dar: Im semiklassischen Grenzfall $J \to \infty$ wird das Abstandsmaß $J\Delta S$ groß; im Grenzfall immer stärkerer Resonanz $\varepsilon \to 0$ [mit dem Bifurkationsparameter aus Gleichung (3.102)] verschwindet es.

Für die Tangentenbifurkation werden wir die Herleitung der Normalform der Amplitude ausführlich besprechen. Ab der Periodenverdreifachung wird die Herleitung ein umfangreiches technisches Unterfangen. Man wird jedoch in allen Fällen auf ein einfaches (sogar erratbares) Ergebnis geführt. Dies läßt eine Darstellung der technischen Details in der Herleitung unsinnig erscheinen. Nach der Maßgabe der Katastrophentheorie reicht es im übrigen aus, die Gleichförmigkeit des asymptotischen Verhaltens unserer Näherungen nachzuweisen, was eine leichte Übung ist. Wir begnügen uns daher erneut mit einem Hinweis auf die Arbeiten [26,27,37].

4.5.1 Tangentenbifurkationen ($m = 1$)

In der lokalen Näherung ist $A(q', p) = 1$. Setzt man die Normalform (3.113) in (4.39) ein, so faktorisiert der Integrand. Das Integral über p ist Gaußsch, während das Integral über q' vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i(\varepsilon q' + a q'^3)\right] \, dq' \tag{4.55}$$

ist und Besselfunktionen der Ordnung $\pm 1/3$ liefert (Formeln 3.695.1 und 3.695.2 in [82]). Wir betrachten zunächst den Fall reeller Bahnen, $\operatorname{sign} \varepsilon = -\operatorname{sign} a$. Man erhält dann

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(1)}_{\text{lokal}} &= n_0 \sqrt{\frac{2\pi J}{27}\left|\frac{\varepsilon}{a\sigma}\right|} \exp\left[iJS_0 - i\frac{\pi}{2}\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\sigma\right)\right] \\
&\quad \times \left[\mathbf{J}_{-1/3}\left(J\left|\frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}}\right|\right) + \mathbf{J}_{-1/3}\left(J\left|\frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}}\right|\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Wir drücken die Koeffizienten der Normalform (3.113) durch die Wirkungsdifferenz (3.117)

$$
\Delta S \equiv \frac{S_+ - S_-}{2} = \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}} \ , \tag{4.57}
$$

die mittlere Wirkung

$$
\bar{S} \equiv \frac{S_+ + S_-}{2} = S_0 \tag{4.58}
$$

und die mittlere semiklassische Amplitude (4.49, 3.118)

$$
\bar{A} \equiv \frac{A_+ + A_-}{2} = n_0 |12\sigma^2 a\varepsilon|^{-1/4} \tag{4.59}
$$

aus und erhalten die lokale Näherung

$$
\mathcal{J}^{(1)}_{\text{lokal}} = \left|\frac{2\pi J\Delta S}{3}\right|^{1/2} \bar{A}\,\exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right]\left[\mathbf{J}_{-1/3}(J|\Delta S|) + \mathbf{J}_{1/3}(J|\Delta S|)\right] \ . \tag{4.60}
$$

Hier ist

$$
\bar{\nu} \equiv \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\sigma \tag{4.61}
$$

der mittlere Maslovindex (3.124).

Für großes Argument verhalten sich die Besselfunktionen wie

$$
\mathbf{J}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \ . \tag{4.62}
$$

Bei festen Werten der Koeffizienten in der Normalform zerfällt daher der Ausdruck im semiklassischen Limes in zwei Beiträge,

$$
\mathcal{J}^{(1)}_{\text{lokal}} \sim \bar{A}\exp\left[iJS_+ - i\frac{\pi}{2}\nu_+\right] + \bar{A}\exp\left[iJS_- - i\frac{\pi}{2}\nu_-\right] \ . \tag{4.63}
$$

Dies entspricht den Beiträgen (4.48) zweier isolierter periodischer Bahnen. Die semiklassischen Amplituden sind jedoch in Übereinstimmung mit der Beziehung (3.119) gleich groß. Daher kann man (4.60) nur in der Nähe der Bifurkation benutzen, also für kleine Werte von ε.

Um eine gleichförmige Näherung zu erhalten, die für beliebiges ε gültig ist, verwenden wir die erweiterte Normalform (3.120). Wir betrachten nur den Einfluß des zusätzlichen Terms $-bq'^4$ auf die Eigenschaften der beiden bifurkierenden Bahnen in der nächsthöheren Ordnung in ε und berücksichtigen nicht die mit ihm verbundene zusätzliche Fixpunktlösung (dies geschieht jedoch in den Abschnitten 3.5.1 und 4.6.1). Nach dem Einsetzen der erweiterten Normalform in (4.39) kann man durch die Variablentransformation

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\varepsilon b}{9a^2} + Q' - Q'^2 \frac{b}{3a} , \\ p &= \frac{P}{1 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}Q'} \end{aligned} \tag{4.64}$$

die Phase des Integranden vereinfachen,

$$\hat{S}(q', p, E) - q'p = \bar{S} - \varepsilon Q' - aQ'^3 - \frac{\sigma}{2}P^2 \left(1 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}Q\right)^{-2} + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{5/2}) . \tag{4.65}$$

Bezüglich Q' hat man die ursprüngliche Normalform mit der Ersetzung von S_0 durch die mittlere Wirkung $\bar{S} = S_0 - \frac{b\varepsilon^2}{9a^2}$ aus (3.122) zurückerlangt. Die Jacobische Determinante der Transformation ist eins. Die Transformation ist also flächenerhaltend. Sie ist aber nur für $|Q'| < \frac{3}{2}\left|\frac{a}{b}\right|$, also (im Einklang mit unserer Zielsetzung) an den bifurkierenden Bahnen, nicht aber am zusätzlichen Fixpunkt gültig. Als Konsequenz verbleiben nach der Transformation nur noch zwei Fixpunkte. Führt man die Gaußsche Integration aus, so erkennt man, daß das Integral seinen Wert behält, wenn wir mit der ursprünglichen Normalform

$$\hat{S}(q', p, E) - q'p = \bar{S} - \varepsilon q' - aq'^3 - \frac{\sigma}{2}p^2 + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{5/2}) \tag{4.66}$$

für die Erzeugende mit $\bar{S}$ anstelle von S_0 arbeiten und für den Vorfaktor die Normalform

$$A(q', p) = 1 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}q' \tag{4.67}$$

verwenden. Zu diesem einfachen Ergebnis kann man etwas direkter gelangen, indem man nur die Variable q', nicht aber p transformiert und dann im Integral die nun von eins verschiedene Jacobische Determinante berücksichtigt.

Es verbleiben zwei Integrale. Der konstante Term in $A(q', p)$ liefert gerade die lokale Näherung. Hinzu kommt eine Korrektur, für die wir ein Integral vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} q' \exp\left[-i\left(\varepsilon q' + aq'^3\right)\right] \, dq' \tag{4.68}$$

zu lösen haben. Es entspricht der Ableitung von (4.55) nach $-i\varepsilon$ und führt auf Besselfunktionen der Ordnung $\pm 2/3$. Als neuer Koeffizient taucht im Endresultat b auf. Er läßt sich aus der Differenz der semiklassischen Amplituden

$$\Delta A \equiv \frac{A_+ - A_-}{2} = -\frac{2}{3}\frac{b}{a}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3a}}\bar{A} \tag{4.69}$$

bestimmen. Das Endresultat lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(1)}_{\text{gleichf}} \;=\; & \left|\frac{2\pi J \Delta S}{3}\right|^{1/2} \exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right] \Big\{ \bar{A}\,\left[\mathbf{J}_{-1/3}(J|\Delta S|) + \mathbf{J}_{1/3}(J|\Delta S|)\right] \\ & -i\,\mathrm{sign}\,(\Delta S)\,\Delta A\,\left[\mathbf{J}_{-2/3}(J|\Delta S|) - \mathbf{J}_{2/3}(J|\Delta S|)\right] \Big\}\,. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Das asymptotische Verhalten der Besselfunktionen (4.62) ergibt, daß der Ausdruck für $J \to \infty$ und $\varepsilon \neq 0$ in die beiden Beiträge

$$\mathcal{J}^{(1)}_{\text{gleichf}} \sim A_+ \exp\left[iJS_+ - i\frac{\pi}{2}\nu_+\right] + A_- \exp\left[iJS_- - i\frac{\pi}{2}\nu_-\right] \tag{4.71}$$

der isoliert betrachteten Bahnen zerfällt. Er erfüllt damit wie erwünscht die Kriterien einer gleichförmigen Näherung und ist auch in größerer Entfernung zur Bifurkation gültig.

Der Beitrag (4.70) hat auf der Seite der Bifurkation seine Gültigkeit, auf der beide Bahnen reell sind. Auf der anderen Seite gibt es zwei Geisterlösungen mit komplexen Koordinaten. Auch die Wirkungen der beiden Bahnen sind komplex. Wir bezeichnen den Orbit mit positivem Imaginärteil der Wirkung mit $+$, den anderen mit $-$. Eine nach der Methode des stärksten Abklingens gewählte Integrationskontur führt nur über den Sattel von $+$. Dies ist sinnvoll, da sich der Beitrag eines isolierten Geistes im Limes $J \to \infty$ wie $\exp[-J\,\mathrm{Im}\,S]$ verhält, er aber nicht über alle Grenzen wachsen kann.

Die semiklassischen Amplituden bezeichnen wir in diesem Fall mit

$$A_\pm = \left[i(\mathrm{sign}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,M_\pm)(2 - \mathrm{tr}\,M_\pm)\right]^{-1/2}\;. \tag{4.72}$$

Der Radikand hat positiven Realteil. Die Wurzel ist so zu nehmen, daß $\arg A$ in $(-\pi/4, \pi/4]$ liegt. In führender Ordnung in ε ist $2 - \mathrm{tr}\,M$ rein imaginär. Dies entspricht der Stabilitätsbeziehung (3.119). Erst in der nächsten Ordnung erhält man wieder einen reellen Term. Dementsprechend ist die Amplitude in der Nähe der Bifurkation reell und positiv. Wie die Wirkungen und die Stabilitätsfaktoren der Geister sind auch ihre Amplituden zueinander konjugiert komplex. Damit gilt $\bar{A} = \mathrm{Re}\,A$ und $\Delta A = i\,\mathrm{Im}\,A$.

Die Integrale (4.55, 4.68) ergeben nun **K**–Besselfunktionen der Ordnung 1/3 und 2/3. Der kollektive Beitrag der Geister lautet schließlich

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(1)}_{\text{gleichf}} &= \left|\frac{2}{\pi}J\Delta S\right|^{1/2} \exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\nu_+\right] \\ &\quad \times\left\{\bar{A}\mathbf{K}_{1/3}(J|\Delta S|) + \Delta A\mathbf{K}_{2/3}(J|\Delta S|)\right\} . \end{aligned} \tag{4.73}$$

Hier ist $\nu_+ = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\sigma$ halbzahlig, wobei sich der Morseindex $\hat{\mu}$ etwa durch eine reelle Trajektorie bestimmen läßt, die den Anfangsimpuls $\operatorname{Re}p$ und den Endort $\operatorname{Re}q'$ hat, sofern die Geister beinahe reelle Koordinaten haben. Für großes Argument ist $\mathbf{K}(x) \sim \sqrt{\pi/(2x)}\exp[-x]$. Damit bleibt für $J\Delta S \to \infty$ gemäß

$$\mathcal{J}^{(1)}_{\text{gleichf}} \sim A_+ \exp\left[iJS_+ - i\frac{\pi}{2}\nu_+\right] \tag{4.74}$$

nur der exponentiell unterdrückte isolierte Beitrag des Geistes mit $\operatorname{Im}S > 0$ übrig.

4.5.2 Periodenverdopplungen ($m = 2$)

In der lokalen Näherung setzt man die Normalform (3.125) in das Phasenraumintegral (4.39) ein und zieht $A(q', p)$ als Konstante vor das Integral. Das Integral faktorisiert erneut in ein Gaußsches Integral über p und ein Integral über q', welches auf Besselfunktionen führt. In diesem Fall sind sie von der Ordnung $\pm 1/4$ (Formeln 3.696.1–4 in [82]). Berücksichtigt man den Einfluß von Termen höherer Ordnung in einer erweiterten Normalform der Erzeugenden, so wird man auf die Normalform

$$A(q', p) = 1 - \frac{3}{4}\frac{b}{a}q'^2 \tag{4.75}$$

des Vorfaktors geführt. Zur lokalen Näherung kommt dann ein Korrekturterm hinzu, in dem Besselfunktionen der Ordnung $\pm 3/4$ auftreten. Der Koeffizient b ist durch die semiklassischen Amplituden festgelegt,

$$A_1 = \sqrt{2}A_0\left(1 + \frac{3}{8}\frac{b\varepsilon}{a^2}\right) . \tag{4.76}$$

Wir verwenden die Abkürzungen

$$\bar{S} = \frac{S_0 + S_1}{2} , \quad \Delta S = \frac{S_0 - S_1}{2} , \quad \bar{\nu} = \frac{\nu_0 + \nu_1}{2} \tag{4.77}$$

und drücken die Koeffizienten im Endresultat durch diese Größen und $A_{0,1}$ aus. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(2)}_{\text{gleichf}} &= \left|\frac{\pi J \Delta S}{2}\right|^{1/2} \exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right] \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_0}{\sqrt{2}}\right) \left[\sigma_2 \mathbf{J}_{1/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{i\sigma_1 \pi/8} + \mathbf{J}_{-1/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{-i\sigma_1 \pi/8}\right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{A_1}{2} - \frac{A_0}{\sqrt{2}}\right) \left[\mathbf{J}_{3/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{i\sigma_1 3\pi/8} + \sigma_2 \mathbf{J}_{-3/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{-i\sigma_1 3\pi/8}\right] \right\} .
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

Hier ist $\sigma_1 = \operatorname{sign}(\Delta S)$. Weiter gilt $\sigma_2 = 1$ auf der Seite der Bifurkation, auf der der Satellit reelle Koordinaten hat; auf der anderen Seite ist $\sigma_2 = -1$.

Beschränkt man sich auf die Terme mit Besselfunktionen der Ordnung $\pm 1/4$, so erhält man die lokale Näherung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(2)}_{\text{lokal}} &= \left|\frac{\pi J \Delta S}{2}\right|^{1/2} \exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right] \\
&\quad \times \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_0}{\sqrt{2}}\right) \left[\sigma_2 \mathbf{J}_{1/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{i\sigma_1 \pi/8} + \mathbf{J}_{-1/4}\left(J|\Delta S|\right) e^{-i\sigma_1 \pi/8}\right] .
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

Ist der Satellit reell, so hat sie das asymptotische Verhalten

$$
\mathcal{J}^{(2)}_{\text{lokal}} \sim \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2\sqrt{2}}\right) \exp\left[iJS_0 - i\frac{\pi}{2}\nu_0\right] + \left(\frac{A_0}{\sqrt{2}} + \frac{A_1}{2}\right) \exp\left[iJS_1 - i\frac{\pi}{2}\nu_1\right] \tag{4.80}
$$

für $J \to \infty$. Die semiklassischen Amplituden der dann isoliert erscheinenden Bahnen sind also miteinander verknüpft: Der Beitrag eines reellen Satelliten ist um $\sqrt{2}$ größer als der des zentralen Orbits. Dies ist eine Konsequenz der Stabilitätsbeziehung (3.119). Die gleichförmige Näherung verhält sich hingegen bei einem reellen Satelliten wie

$$
\mathcal{J}^{(2)}_{\text{gleichf}} \sim A_0 \exp\left[iJS_0 - i\frac{\pi}{2}\nu_0\right] + A_1 \exp\left[iJS_1 - i\frac{\pi}{2}\nu_1\right] . \tag{4.81}
$$

Sie führt demnach auf völlig unabhängige Beiträge der beiden Bahnen.

Es zeigt sich ferner in beiden Näherungen, daß ein Geistersatellit im betrachteten Grenzfall gänzlich irrelevant ist. Asymptotisch tritt nämlich auf der anderen Seite der Bifurkation nur der erste Term in (4.80) und (4.81) auf; so hat man etwa

$$
\mathcal{J}^{(2)}_{\text{gleichf}} \sim A_0 \exp\left[iJS_0 - i\frac{\pi}{2}\nu_0\right] . \tag{4.82}
$$

Ein anderes Verhalten ist nicht zu erwarten, da der Geist aus einer Periodenverdopplung eine reelle Wirkung besitzt und sein isolierter Beitrag nicht unterdrückt werden würde. Der Satellit erfährt also an der Bifurkation zugleich seinen Stokesübergang.

4.5.3 Periodenverdreifachungen ($m = 3$)

Zur Herleitung der Normalform der Amplitude benutzt man am besten kartesische Koordinaten q', p und erhält

$$A(q', p) = 1 + \frac{b}{2}(q'^2 + p^2) \tag{4.83}$$

mit

$$b = \frac{27}{4} \frac{a^2}{|\varepsilon|} \left(\frac{A_1}{\sqrt{3}} - A_0 \right) . \tag{4.84}$$

Nach der Variablentransformation $q' = \sqrt{2I} \sin \varphi'$, $p = \sqrt{2I} \cos \varphi'$ erhält man

$$\mathcal{I}^{(3)}_{\text{gleichf}} = \int \frac{dI \, d\varphi'}{2\pi/J} (1 + bI) \exp \left[-iJ \left[\varepsilon I + a I^{3/2} \cos(3\varphi') \right] - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \right] . \tag{4.85}$$

Hier ergibt die Integration über φ' ein Besselfunktion $\mathbf{J}_0$. Auch das verbleibende Integral

$$\mathcal{I}^{(3)}_{\text{gleichf}} = J \int_0^\infty dI \, (1 + bI) \mathbf{J}_0 \left(J a I^{3/2} \right) \exp \left[-iJ\varepsilon I - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \right] \tag{4.86}$$

läßt sich auswerten und ergibt erneut Besselfunktionen. Der konstante Term in $A(I, \varphi')$ führt auf Besselfunktionen der Ordnung $\pm 1/6$. Der veränderliche Term liefert einen Beitrag in der Form einer Ableitung des ersten Terms nach ε, wodurch Besselfunktionen der Ordnung $\pm 5/6$ hinzukommen. Das Endresultat lautet mit den Abkürzungen analog zu (4.77) und $\sigma = \operatorname{sign}(\Delta S)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(3)}_{\text{gleichf}} \;\; &= \;\; \sqrt{2\pi J |\Delta S|} \, \exp \left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\nu_0 \right] \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2\sqrt{3}} \right) \left[\mathbf{J}_{-1/6}(J|\Delta S|) + i\sigma \mathbf{J}_{1/6}(J|\Delta S|) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{A_0}{2} - \frac{A_1}{2\sqrt{3}} \right) \left[\mathbf{J}_{-5/6}(J|\Delta S|) + i\sigma \mathbf{J}_{5/6}(J|\Delta S|) \right] \right\} . \end{aligned} \tag{4.87}$$

Es zerfällt erneut für $J \to \infty$ in die gewünschte Summe dreier Beiträge (4.48).

4.5.4 Periodenvervierfachungen ($m = 4$)

Die Periodenvervierfachung ist die einzige Bifurkation mit Kodimension eins, für die sich die gleichförmige und die lokale Näherung des kollektiven Beitrags der bifurkierenden Bahnen nicht in geschlossener Form angeben läßt. Die auftretenden Integrale lassen sich nur numerisch lösen, indem man etwa auf eine der unten angegebenen Reihendarstellungen zurückgreift.

Die Normalform der Erzeugenden ist in (3.140) angegeben. Die Koeffizienten ε, a, b und S_0 sind durch die Wirkungen der drei Orbits und den Stabilitätsfaktor der zentralen Bahn festgelegt. Nach einer seitenfüllenden Rechnung, in der man zunächst aus den Termen höherer Ordnung in der Normalform der Hamiltonfunktion die erweiterte Form der Erzeugenden bestimmt und dann die zusätzlichen Terme in der Umgebung der bifurkierenden Bahnen wieder wegtransformiert, erhält die Amplitude die einfache Gestalt

$$A(q',p) = 1 + \frac{c}{2}(q'^2 + p^2) + \frac{d}{4}(q'^2 + p^2)^2 \, . \tag{4.88}$$

Mit der Ersetzung $q' = \sqrt{2I}\sin\varphi'$, $p = \sqrt{2I}\cos\varphi'$ lautet der kollektive Beitrag also

$$\mathfrak{J}^{(4)}_{\text{gleichf}} = J\int_0^\infty dI\,(1 + cI + dI^2)\mathbf{J}_0\left(J|b|I^2\right)\exp\left[iJ(S_0 - \varepsilon I - aI^2) - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu}\right] \, . \tag{4.89}$$

Im Grenzfall großer skalierter Wirkungsdifferenzen $J\Delta S \to \infty$ führt er auf eine Summe dreier isolierter Beiträge (4.48). Die semiklassischen Amplituden der Satelliten sind

$$A_\pm = (1 + cI_\pm + dI_\pm^2)\left|8b\frac{\varepsilon^2}{a \pm b}\right|^{-1/2} \tag{4.90}$$

mit $I_\pm$ aus (3.141). Setzt man dies mit den Ausdrücken (4.49) gleich, kann man c und d durch die Lösung des daraus folgenden linearen Gleichungssystems gewinnen und hat damit alle Koeffizienten durch die kanonisch invarianten Größen der periodischen Bahnen festgelegt. Dies gelingt auch für komplexe Satelliten, die im Falle der Periodenvervierfachung reelle Wirkungen und Stabilitätsfaktoren haben.

Das Integral (4.89) läßt sich nur in Sonderfällen in geschlossener Form angeben [27]. Man kann es jedoch numerisch auswerten. Als nützlich haben sich Reihendarstellungen erwiesen. Für $|a| > |b|$ entwickeln wir das Integral vom Typ

$$\mathfrak{K}_\nu \equiv \int_0^\infty x^\nu \mathbf{J}_0(\beta x^2)\exp[i\gamma x + i\alpha x^2]\,dx \tag{4.91}$$

mit $\nu = 0, 1, 2$ in einer zweiparametrigen Taylorreihe um $\gamma = 0$, $\beta/\alpha = b/a = 0$. Die Entwicklung um $\gamma = 0$ führt auf

$$\mathfrak{K}_\nu = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(i\gamma)^n x^{n+\nu}}{n!}\mathbf{J}_0(\beta x^2)\exp[i\alpha x^2]\,dx \tag{4.92}$$

und damit auf Integrale, die sich mittels einer analytischen Fortsetzung mit $\delta = -i\alpha$ über die Formel 6.621.1 in [82] auswerten lassen,

$$\int_0^\infty x^n \mathbf{J}_0(\beta x^2)\exp[-\delta x^2]\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{J}_0(\beta z)\exp[-\delta z]\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta^{-\frac{n+1}{2}} F\left(\frac{n+1}{4}, \frac{n+3}{4}; 1; -\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m} \left(-\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+2m\right)}{(m!)^2} . \tag{4.93}$$

Es treten hier Gaußsche hypergeometrische Funktionen

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1)_m(\gamma)_m} z^m \tag{4.94}$$

mit den Pochhammerpolynomen

$$(x)_m = \prod_{l=0}^{m-1}(x+l) = \frac{\Gamma(m+x)}{\Gamma(x)} \tag{4.95}$$

auf. Im letzten Schritt von (4.93) haben wir die Eigenschaft

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) \tag{4.96}$$

der Gammafunktion benutzt. Das Endresultat lautet

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\gamma)^n}{(-i\alpha)^{\frac{n+\nu+1}{2}}} \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}+2m\right)}{n!(m!)^2} . \tag{4.97}$$

Der Konvergenzradius ist $|\beta/\alpha| = |b/a| < 1$. Man kann oben auch

$$F\left(\frac{n+1}{4}, \frac{n+3}{4}; 1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = \left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{-(n+1)/4} P_{(n-1)/2}\left(\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{-1/2}\right) \tag{4.98}$$

heranziehen, muß dann aber Legendrefunktionen $P_\nu(x)$ für $x > 1$ auswerten. Viele numerische Standardroutinen kann man jedoch nur für $|x| < 1$ verwenden.

Im Falle $|a| < |b|$ benutzen wir die Formeln 6.699.1 und 6.699.2 in [82],

$$\int_0^\infty x^n \mathbf{J}_0(x^2) \exp\left[i\alpha x^2\right] dx \tag{4.99}$$

$$= 2^{(n-3)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-n}{4}\right)} F\left(\frac{1+n}{4}, \frac{1+n}{4}; \frac{1}{2}; \alpha^2\right) + i2^{(n-1)/2}\alpha\frac{\Gamma\left(\frac{3+n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right)} F\left(\frac{3+n}{4}, \frac{3+n}{4}; \frac{3}{2}; \alpha^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2^{n-3}}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2m}}{m!}\left[\sin\left(\frac{1+n}{4}\pi\right)\frac{\Gamma^2\left(\frac{1+n}{4}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)} + i\alpha\cos\left(\frac{1+n}{4}\pi\right)\frac{\Gamma^2\left(\frac{3+n}{4}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}\right] ,$$

und erhalten

$$\int_0^\infty x^\nu \mathbf{J}_0(x^2) \exp\left[i\gamma x + i\alpha x^2\right]\, dx = \frac{\sqrt{2^\nu}}{\sqrt{8\pi}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}i\gamma)^n \alpha^{2m}}{m!n!} \tag{4.100}$$

$$\times \left[\sin\left(\tfrac{1+n+\nu}{4}\pi\right) \frac{\Gamma^2\left(\frac{1+n+\nu}{4}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)} + i\alpha\cos\left(\tfrac{1+n+\nu}{4}\pi\right) \frac{\Gamma^2\left(\frac{3+n+\nu}{4}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}\right].$$

4.5.5 Höhere Periode–m–Bifurkationen

Für Periode–m–Bifurkationen mit $m \geq 5$ ist die Wirkungsdifferenz der beiden Satelliten von größerer Ordnung in ε als die Differenz zum zentralen Orbit. Sie bilden daher eine Art gebrochenen Torus. Die gleichförmige Näherung hat Martin Sieber gefunden [37] und lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(m)}_{\text{gleichf}} &= \Theta(\hat{\varepsilon})\sqrt{2\pi J\Delta S}\exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right]\left[\bar{A}\mathbf{J}_0(J\Delta S) + i\Delta A\mathbf{J}_1(J\Delta S)\right] \\
&\quad + i\,\mathrm{sign}(\hat{\varepsilon})\beta\exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\nu_0\right]\bar{A}\sqrt{J|\Delta S|}\int_\Lambda^\infty \frac{dX}{X^2}\exp\left[i\frac{\beta}{2}X^2\right] \\
&\quad + A_0\exp\left[iJS_0 - i\frac{\pi}{2}\nu_0\right]
\end{aligned} \tag{4.101}$$

mit $\beta = \mathrm{sign}(S_0 - \bar{S})$, $\Lambda = \sqrt{2J\beta(S_0 - \bar{S})}$, $\bar{\nu} = \frac{1}{2}(\nu_+ + \nu_-)$,

$$\bar{S} = \frac{S_+ + S_-}{2}, \quad \Delta S = \frac{S_+ - S_-}{2}, \quad \bar{A} = \frac{A_+ + A_-}{2}, \quad \Delta A = \frac{A_+ - A_-}{2}. \tag{4.102}$$

Der Parameter $\hat{\varepsilon}$ ist positiv, wenn die Satelliten reelle Koordinaten haben, ansonsten ist er negativ. Ferner sind die Satelliten $\pm$ so bezeichnet, daß für reelle Koordinaten $\Delta S > 0$ ist. Der erste Term der gleichförmigen Näherung entspricht dem Beitrag eines Satellitentorus. Die Heavisidesche Stufenfunktion $\Theta(\hat{\varepsilon})$ sorgt dafür, daß Geister nicht beitragen. Der letzte Term ist der isolierte Beitrag des zentralen Orbits, dessen Größen oben mit dem Index 0 versehen sind. Hinzu kommt ein Interferenzterm, der unter anderem dafür sorgt, daß sich die Divergenz des letzten Terms für $\varepsilon \to 0$ weghebt.

In der Herleitung verwendet man die Näherung [15,17,37]

$$J\int_0^\infty g(I)e^{iJf(I)}\,dI = -\frac{g(0)}{if'(0)}\exp[iJf(0)] \tag{4.103}$$

$$+g(I^*)\sqrt{\frac{i2\pi J}{f''(I^*)}}e^{iJf(I^*)}\left\{\Theta(I^*) + \sqrt{\frac{i\beta}{2\pi}}\,\mathrm{sign}\,I^*\int_\Lambda^\infty \frac{dX}{X^2}\exp\left[i\beta\frac{X^2}{2}\right]\right\},$$

die Auskunft über den Einfluß einer endlichen Integrationsgrenze auf den Beitrag eines stationären Punktes liefert. Hier ist I^* seine Lage, die möglicherweise auch außerhalb des Integrationsbereichs sein kann, $\Lambda = |2J[f(0) - f(I^*)]|^{1/2}$ und $\beta = \mathrm{sign}\, f''(I^*)$. Wir werden diese Näherung später noch benötigen.

4.6 Kollektive Beiträge zur Kodimension zwei

Wie schon bei der Periodenvervierfachung mit Kodimension eins führen die Bifurkationen der Kodimension zwei auf lokale und gleichförmige Näherungen, die sich nicht mehr in geschlossener Form angeben lassen. Man bleibt auf der Stufe des Phasenraumintegrals stehen, für welches sich aber numerisch handhabbare Reihenentwicklungen finden lassen. Weiterhin lassen sich aber alle auftretenden Koeffizienten durch die charakteristischen Eigenschaften der periodischen Bahnen ausdrücken, auch wenn die Bestimmungsgleichungen teilweise nur numerisch lösbar sind. Dies wurde etwa in den Abschnitten 3.5.1 und 3.5.3 für die Koeffizienten der Normalformen für zwei benachbarte Tangentenbifurkationen und die Aufeinanderfolge einer Tangentenbifurkation und einer Periodenverdreifachung besprochen.

Bei den diskutierten Szenarien ist jeweils eine Periode–m–Bifurkation und eine Tangentenbifurkation der Satelliten im Spiel. Die gleichförmigen Näherungen beschreiben nicht nur die Abfolge dieser lokalen Bifurkationen in enger Nachbarschaft im Kontrollparameterraum. Die Normalformen erfassen auch den baldigen Stokesübergang eines an einer Tangentenbifurkation beteiligten Geistes mit $\mathrm{Im}\, S > 0$ mit einem dominanten Orbit m–fach kürzerer Länge. Wie bei den lokalen Bifurkationen der Kodimension eins scheint man das Verhältnis der Perioden der beteiligten Bahnen zur Klassifikation verschiedener globaler Bifurkationstypen heranziehen zu können.

4.6.1 Zwei benachbarte Tangentenbifurkationen

Die Normalformen (3.150) oder (3.153) beschreiben demnach nicht nur zwei benachbarte Tangentenbifurkationen, sondern auch den baldigen Stokesübergang eines in einer Tangentenbifurkation involvierten Geistes mit einem eng benachbarten dominanten Orbit gleicher Periodenlänge [83]. Mit Gleichung (3.164) tritt er bei $\tilde{q}^2 = 1 + 2/\sqrt{3}$ auf. Der kollektive Beitrag (4.73) der Geister hat dann noch nicht seine asymptotische Form (4.48) angenommen, so daß sich die Näherung (4.51) nicht verwenden läßt. Als Amplitude verwenden wir

$$A(q', p) = 1 + cq' + dq'^2 \,. \tag{4.104}$$

Setzt man dies und (3.153) in (4.39) ein und führt ein Näherung der stationären Phase durch, so lassen sich die zusätzlichen Koeffizienten c und d mittels eines linearen Gleichungssystems aus den semiklassischen Amplituden bestimmen. Weiterhin erhält man bei der exakten Auswertung des Integrals nach Integration über p und einer Skalierung von q' Integrale der Form

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu \exp\left[-i(t^4 + xt^3 + yt^2)\right]\, dt\ . \tag{4.105}$$

Sie lassen sich durch das Pearceyintegral [84] und Ableitungen davon ausdrücken. Man kann diese eindimensionalen Integrale bequem numerisch auswerten, indem man die Integrationskonturen nach der Methode des stärksten Abklingens des Integranden konstruiert. Die drei Sättel liegen bei $t = 0$,

$$t = -\frac{3}{8}x \pm \sqrt{\frac{9}{64}x^2 - \frac{y}{4}}\ . \tag{4.106}$$

Die Konturen über reelle Sättel tragen immer bei, die Kontur über den Geist mit $\operatorname{Im} S < 0$ nur diesseits des Stokesüberganges, jene des anderen Geistes niemals. Es lassen sich auch Reihendarstellungen finden, indem man um $x = 0$, $y = 0$ herum entwickelt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \exp\left[-it^m\right]\, dt = \left[1 + (-1)^n\right] \frac{1}{m} \exp\left[-i\pi\frac{1+n}{2m}\right] \Gamma\left(\frac{1+n}{m}\right) \tag{4.107}$$

verwendet.

4.6.2 Periodenverdopplung und Tangentenbifurkation

Die semiklassische Amplitude in lokaler Näherung wurde auf der Basis der Erzeugenden (3.168) von Main und Wunner untersucht [78]. Die gleichförmige Näherung erhält man mit

$$A(q', p) = 1 + cq'^2 + dq'^4\ . \tag{4.108}$$

Die Koeffizienten sind wieder durch die Forderung nach dem richtigen asymptotischen Verhalten im Limes $J \to \infty$ festgelegt. Es treten nun Integrale der Form

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu \exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x^4 + x^6)\right]\, dx \tag{4.109}$$

mit $\nu = 0, 2, 4$ auf. Für $\nu = 0$ ist in [78] die Reihendarstellung

$$\mathfrak{K}_0 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{n!m!} \Gamma\left(\frac{2n+4m+1}{6}\right) \exp\left[i\frac{8n+10m+1}{12}\pi\right] \tag{4.110}$$

angegeben, aus der die anderen beiden Integrale durch Ableiten nach $i\alpha$ folgen.

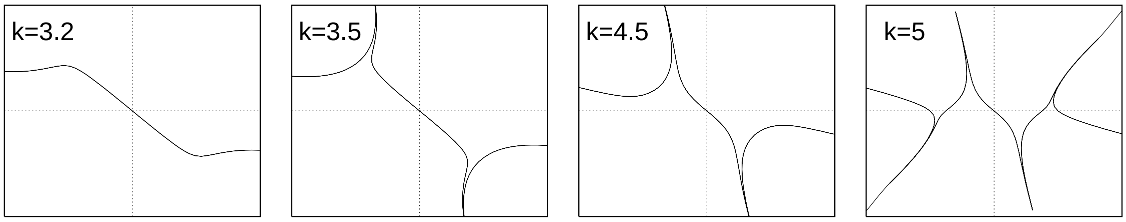


Abbildung 12: Integrationskonturen in der komplexen q–Ebene für die Abfolge eines Stokesüberganges mit dominantem Orbit der Länge eins und einer Tangentenbifurkation von Periode–zwei–Orbits. Der Beschreibung liegt die Normalform (3.168) zugrunde.

Aber auch durch Konturverschiebung in die komplexe Ebene lassen sich die Integrale bequem numerisch ausrechnen. In Abbildung 12 sind Integrationskonturen gezeigt, die sich ergeben, wenn man den Stokesübergang der Bahnen aus der Bifurkation $[^2/_1]_1$ mittels der Normalform behandelt. Der dominante Orbit ist hier $[^2/_0]^{(2)}$. Der Übergang findet bei $k \approx 3.3$ statt. Dadurch erhält die Kontur zwei weitere Abschnitte, auf denen die beiden Punkte des relevanten Geistes liegt. Mit der Bifurkation kommen zwei weitere Äste hinzu, da nun alle drei Bahnen reell und relevant sind.

4.6.3 Periodenverdreifachung und Tangentenbifurkation

Den kollektiven Beitrag der beiden Satelliten dreifacher Periodenlänge und des zentralen Orbits erhält man durch Einsetzen der Erzeugenden (3.171) und

$$A(\varphi', I) = 1 + cI + dI^2 \tag{4.111}$$

in (4.39), wobei die Koeffizienten d und c wieder aus den semiklassischen Amplituden der Satelliten in der Näherung der stationären Phase folgen. Die gleichförmige Näherung lautet also

$$\mathfrak{I}^{(1+3)}_{\text{gleichf}} = \iint \frac{d\varphi'\, dI}{2\pi/J}(1 + cI + dI^2)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[-\varepsilon I - aI^{3/2}\cos(3\varphi') - bI^2\right] - i\frac{\pi}{2}\nu\right] . \tag{4.112}$$

Nach Integration über φ' wird man in der lokalen Näherung auf ein Integral der Form

$$\mathfrak{K}(\alpha, \beta) \equiv \int_0^\infty \mathbf{J}_0(I^{3/2})\exp\left[i(\alpha I + \beta I^2)\right]\, dI \tag{4.113}$$

geführt, für welches sich die Reihendarstellung

$$\mathfrak{K}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!m!}(-i\beta)^{-(n+1)/2}(-4i\beta)^{-3m}$$

$$\times \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 3m\right)}{(2m)!\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} - \frac{(4\beta/i)^{-3/2}\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2 + 3m\right)}{(2m+1)!\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} \right) \tag{4.114}$$

finden läßt. Darstellungen für die beiden in der gleichförmigen Näherung zusätzlich benötigten Integrale erhält man daraus durch Ableiten nach α.

Im Grenzfall $\varepsilon/b \to -\infty$ bilden die beiden Satelliten einen Torus in weiter Entfernung zum zentralen Orbit. Es ist zur Diskussion dieses Falls nützlich, den Vorfaktor durch eine partielle Integration in die Form

$$A(\varphi', I) = 1 + c'I + d'I^{3/2} \cos 3\varphi' \tag{4.115}$$

zu bringen. Man sieht dann schnell, daß dies auf den weiter unten vorgestellten Beitrag eines einfach gebrochenen Torus und den isolierten Beitrag des zentralen Orbits führt.

Befindet man sich dagegen weit auf der anderen Seite der Bifurkation, so trägt nur noch der zentrale Orbit bei, da der Beitrag des zunächst relevanten Geists durch einen Stokesübergang ausgeblendet wurde.

4.7 Integrable Systeme

Für integrable Systeme ist die Erzeugende durch (3.57) gegeben. Dies stimmt mit der Form

$$U(t) = \exp\left[-iJHt\right] \tag{4.116}$$

des Zeitentwicklungsoperators eines autonomen Systems überein. In Winkel- und Wirkungsvariablen ist φ nur modulo 2π bestimmt. Dies hängt mit der Quantisierung der Wirkungsvariablen I zusammen, die nur diskrete Wert $I = m/J$ mit $m \in \mathbb{N}$ annimmt. Aus diesem Grund haben wir bisher bei der Auswertung des Integrals (4.39) in kartesischen Koordinaten gearbeitet. In der Winkelkoordinate muß man eigentlich das Integral $\int_0^\infty dI f(I)$ durch die Summe $\sum_{m=0}^\infty f(I_m)/J$ ersetzen. Mit der Poissonschen Summationsregel (4.12) kommt man aber wieder zu einem Integral zurück,

$$\operatorname{tr} F^n = \frac{J}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dI \exp\left[-iJ[nTH(I) - 2\pi mI] - i\frac{\pi}{2}\hat{\mu}\right] . \tag{4.117}$$

Man integriert über φ' und erhält ein Integral über I mit Punkten stationärer Phase bei

$$n\omega = m\omega_0 . \tag{4.118}$$

Hier ist wieder $\omega = dH/dI$ und $\omega_0 = 2\pi/T$. Ausgewählt werden gerade jene rationalen Tori, auf denen periodische Bahnen der stroboskopischen Periode n leben [vgl. Gl. (3.54)]. Jeder Torus liefert den Beitrag [15,16]

$$\mathfrak{I}^{(\text{rationaler Torus})} = \sqrt{\frac{J\omega_0}{n|\omega'|}} \exp\left[iJS - i\frac{\pi}{2}\nu\right] \tag{4.119}$$

mit $\omega' = d\omega/dI$, der Wirkung $S = nT(\omega I - H)$ und dem Maslovindex $\nu = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\omega'$.

Liegt ein Torus sehr nahe an der unteren Integrationsgrenze des I–Integrals in (4.117), so bricht die Näherungsmethode der stationären Phase zusammen. Stattdessen benutzt man wieder (4.104). Wir werden diese Situation in Abschnitt 5.4.2 beispielshalber anhand des Falls der reinen Torsion genauer beleuchten.

4.8 Beinahe integrable Systeme

Den Beitrag eines einfach gebrochenen rationalen Torus, der durch eine stabile und eine instabile periodische Bahn der Periode n gebildet, haben Tomsovic, Grinberg und Ullmo angegeben [85,86]. Man erhält ihn aus der Erzeugenden (3.84) und der Amplitude

$$A(I, \varphi') = 1 + c\cos(n\varphi')\ . \tag{4.120}$$

Der Koeffizient c ist durch das Verhältnis

$$c = \frac{\Delta A}{\bar{A}} \tag{4.121}$$

der Differenz $\Delta A = \frac{1}{2}(A_+ - A_-)$ und des Mittelwertes $\bar{A} = \frac{1}{2}(A_+ + A_-)$ der semiklassischen Amplituden der periodischen Bahnen gegeben. Es sei $S_+ > S_-$ und somit $\nu_\pm = \bar{\nu} \pm 1/2$. Wir gehen davon aus, daß der Radius I des Torus sehr groß ist und wir so die untere Grenze der Integration über I nach $-\infty$ verschieben können. Für $J \to \infty$ macht man dabei keinen Fehler. Die Integrale über I und φ' lassen sich dann durchführen und ergeben

$$\mathfrak{I}^{(\text{gebr. Torus})}_{\text{gleichf}} = \sqrt{2\pi J\Delta S}\exp\left[iJ\bar{S} - i\frac{\pi}{2}\bar{\nu}\right]\left[\bar{A}\mathbf{J}_0(J\Delta S) + i\Delta A\mathbf{J}_1(J\Delta S)\right]\ . \tag{4.122}$$

Hier haben wir im Vergleich zum Resultat von Tomsovic, Grinberg und Ullmo einen Term vernachlässigt, der von Ordnung $1/J$ kleiner als die angegebenen ist. Nähern wir uns mit verschwindender Störung $\varepsilon \to 0$ dem integrablen System, so wird $|2 - \operatorname{tr} M_\pm| \to |\omega' nT\Delta S|$, $J\Delta S \to 0$, $\Delta A \to 0$, und man kehrt zum Ausdruck (4.119) zurück. Im entgegengesetzten Fall $J\Delta S \to \infty$ zerfällt der Ausdruck in die isolierten Beiträge der beiden Bahnen.

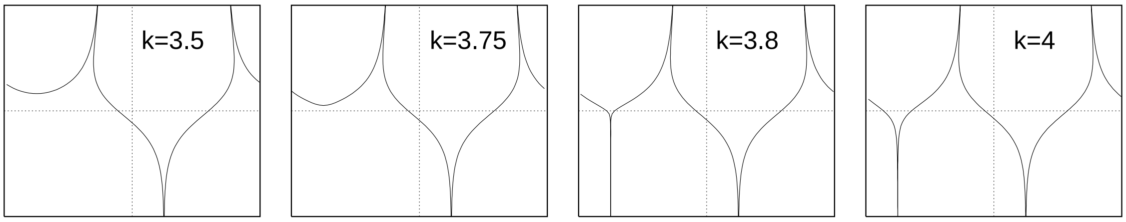


Abbildung 13: Integrationskonturen auf dem komplexen φ'–Torus auf Grundlage der Normalform (3.91) für einen doppelt gebrochenen Torus. Die rechten und linken Begrenzungen der einzelnen Teilbilder liegen bei $\varphi = \pm\pi$ und sind jeweils miteinander zu identifizieren.

Für einen doppelt gebrochenen Torus benützt man die Normalform (3.91) und die Amplitude

$$A(I, \varphi') = 1 + d\cos(n\varphi' + \varphi_1) + e\cos(2n\varphi' + \varphi_0)\ . \tag{4.123}$$

Nachdem man das I–Integral ausgeführt hat, ist das verbleibende φ'–Integral numerisch mittels der Methode des stärksten Abklingens des Integranden zugänglich, die auch bei diesem eindimensionalen Integral mit wenigen Sätteln sehr empfehlenswert ist. In unserem Fall gibt es vier Sättel, von denen zwei zu Geistern gehören können.

Abbildung 13 zeigt typische Integrationskonturen dies- und jenseits der Bifurkation des einen Paares. Die Daten, die in die Konstruktion der Normalform einfließen, stammen aus einem Fall, der in Abschnitt 5.2.3 genauer spezifiziert wird. Er ist mit der Bifurkation $[^3/_1]_4$ bei $k = 3.79\ldots$ verknüpft.

5 Spuren und Spektren des Kreisels

Wir wenden uns nun wieder dem Kreisel zu. Die verschiedenen semiklassischen Beiträge zur Spur aus Kapitel 4 werden zunächst jeder für sich mittels des sogenannten Wirkungsspektrums untersucht. Wir finden sehr gute Übereinstimmung zwischen semiklassischen und exakt quantenmechanischen Resultaten, wenn man kollektive Beiträge heranzieht. Die isolierten Beiträge sind nur weitab einer Bifurkation gültig, die lokalen Näherungen versagen gerade dort sowie im semiklassischen Grenzfall.

Damit sind alle Vorarbeiten zur Berechnung konkreter Spuren und Spektren abgeschlossen. Die Spuren $\operatorname{tr} F^n$ mit $n = 1$, 2 und 3 werden für verschiedene Werte der Quantenzahl j in semiklassischer Näherung berechnet und mit dem exakten Resultat verglichen. Für das Spektrum benötigen wir auch die Determinante $\det F$. Sie ist analytisch zugänglich und kann semiklassisch exakt reproduziert werden. Auch die reine Drehung und die reine Torsion lassen sich analytisch behandeln. In beiden Fällen stimmen die Spuren und damit auch das Spektrum sogar mit dem quantenmechanischen Resultat überein.

Für den allgemeinen Fall berechnen wir Spektren für die ganzzahligen Wert $j = 1$, 2 und 3 und die halbzahligen Werte $j = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$.

Selbst für diese moderaten Werte von j, weitab des echten semiklassischen Grenzfalls, erhält man schon schöne Ergebnisse. Die exakten Quasienergien werden bis auf einen kleinen Prozentsatz ihres typischen mittleren Abstands reproduziert, und zwar über den gesamten untersuchten k–Bereich von klassisch regulärem bis hin zu ausgeprägt chaotischem Verhalten.

Allerdings stoßen wir bereits an die Grenze des Machbaren: Mit j wächst ja auch die Länge der benötigten periodischen Bahnen, die rapide immer zahlreicher werden, und auch die kollektiv beitragenden Konfigurationen periodischer Bahnen werden immer komplizierter.

5.1 Das Wirkungsspektrum und die Güte kollektiver Beiträge

In diesem Abschnitt wollen wir exemplarisch verschiedene semiklassische Beiträge periodischer Bahnen zu den Spuren $\operatorname{tr} F^n$ auf ihre Gültigkeit hin untersuchen. Einzelne Spuren selbst eignen sich nicht sonderlich gut dazu, da sie sich aus einer Vielzahl von Beiträgen zusammensetzen. Es ist in diesem Zusammenhang nützlich, sich mit der Abhängigkeit der verschiedenen Beiträge von der inversen effektiven Planckschen Konstanten J auseinanderzusetzten. Im isolierten Beitrag (4.48) geht J nur in die Phase ein und ist dort mit der Wirkung verziert. Betrachtet man demnach Spuren $\operatorname{tr} F^n$ für ein festes n und variiert die Quantenzahl j (mit $J = j + \frac{1}{2}$), so lassen sich einzelne Beiträge durch eine Art Fourierreihenentwicklung extrahieren [87,88,22,26–28]. Wir bedienen uns einer endlichen Teilsumme aus einer solchen Entwicklung,

$$T^{(n)}(S) \equiv \frac{1}{j_{\max} + 1 - j_{\min}} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \operatorname{tr} F^n(j) \exp\left[-i\left(j + \frac{1}{2}\right) S\right] \ . \tag{5.1}$$

Die inverse effektive Plancksche Konstante ist als Summationsindex „konjugiert“ zum Argument $S \in [0, 2\pi)$. (Wir werden der Einfachheit halber nur über ganzzahliges j summieren. Schließt man auch halbzahlige j's mit ein, so liegt S in $[0, 4\pi)$).

Setzt man für $\operatorname{tr} F^n$ semiklassisch eine Summe isolierter Beiträge (4.48) von periodischen Bahnen i der Länge n und Wirkung S_i an, so erwartet man in $|T^{(n)}(S)|^2$ Peaks bei $S = S_i$ mit der Höhe $|A_i|^2$ aus (4.49). Aus diesem Grund nennen wir $|T^{(n)}(S)|^2$ in der Folge das *Wirkungsspektrum*. Die Breite der Peaks wird durch das Auflösungsvermögen der Entwicklung (5.1) und somit durch die Summationsgrenzen bestimmt. Sofern nichts anderes angegeben ist, benutzen wir $j_{\min} = 1$ und $j_{\max} = 64$. Das Auflösungsvermögen in S ist dann von der Größenordnung $2\pi/64 \approx 0.1$.

Auch in den kollektiven Beiträgen ist die J–Abhängigkeit der Phase ähnlich der der isolierten Beiträge. Dort fließt nun eine geeignet gemittelte Wirkung ein, wie insbesondere in den Ausdrücken (4.70), (4.78) und (4.87) deutlich wird. Dies ist eine Konsequenz der einfachen J–Abhängigkeit des Integranden in (4.39). Kollektive Beiträge beschreiben mehrere Bahnen gleichzeitig und werden zu einem ausgedehnten Peak führen. Es hängt von der mit J skalierten Wirkungsdifferenz der Bahnen ab, ob der Peak gegebenenfalls eine feinere Struktur aufweist. So ist es etwa in enger Nachbarschaft zur Bifurkation durchaus möglich, daß sich zu den bifurkierenden Bahnen nur ein gemeinsamer Peak im Wirkungsspektrum findet. In hinreichender Entfernung zur Bifurkation erwartet man hingegen für jede Bahn einen eigenen Peak, da die kollektiven Beiträge dann in eine Summe isolierter Beiträge zerfallen. [Aber auch Peaks von im Phasenraum weit voneinander entfernten Bahnen können sich überlagern, wenn sie zufällig beinahe die gleiche Wirkung (modulo 2π) haben.] In den lokalen Näherungen sind die Peakhöhen miteinander verknüpft. Sie sind daher nur in der Nähe der Bifurkation gültig, wo die entsprechenden Beziehungen zwischen den Stabilitätsfaktoren noch gut erfüllt sind. Die gleichförmigen Näherungen zerfallen asymptotisch in isolierte Beiträge mit unabhängigen Peakhöhen und sollten auch weit von der Bifurkation entfernt verwendbar sein.

Diese Erwartungen können wir für den periodisch getriebenen Kreisel bestätigen. Wir benutzen wieder die mit einem Kontrollparameter k ausgestattete Variante aus Abschnitt 2.2.3. Die periodischen Bahnen und Bifurkationen haben wir in Abschnitt 3.6 untersucht. Die quantenmechanischen Spuren und damit auch die exakten Wirkungsspektren sind numerisch leicht erhältlich.

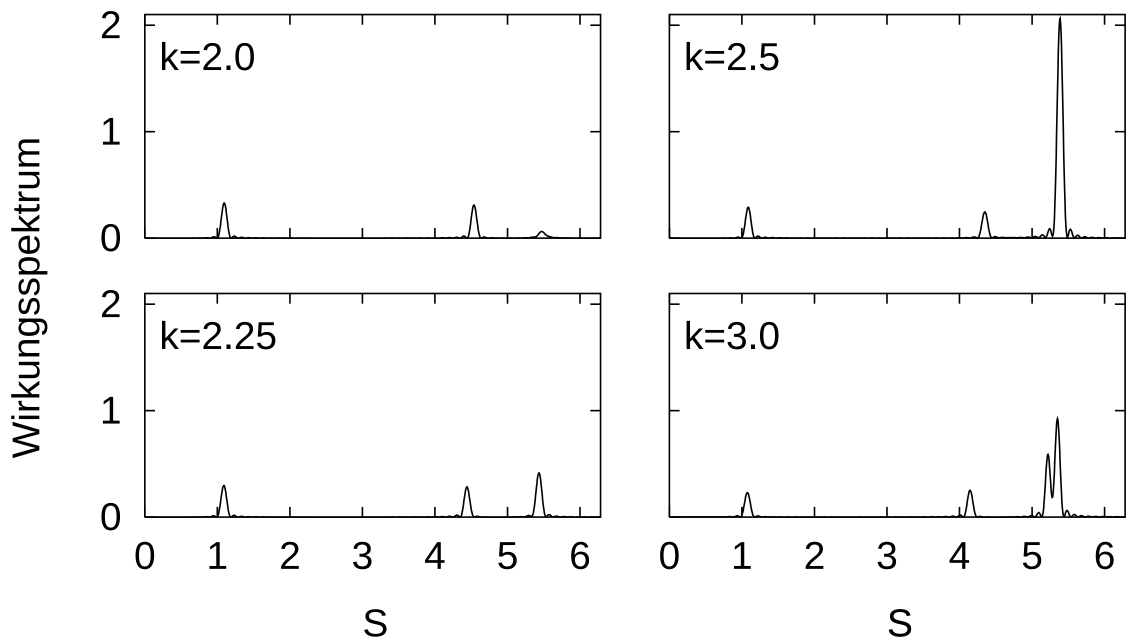
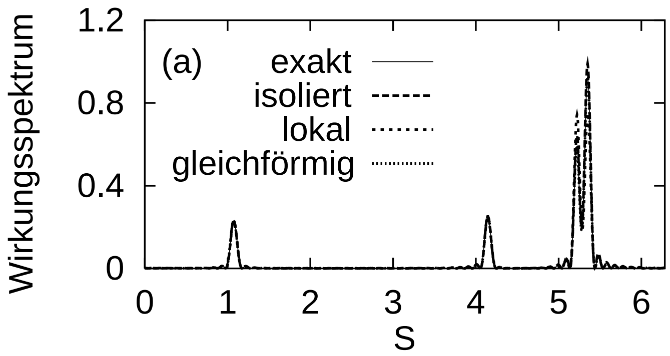


Abbildung 14: Abfolge quantenmechanisch berechneter Wirkungsspektren $|T^{(1)}(S)|^2$ für steigende Werte des Kontrollparameters k. Die Peaks können den periodischen Bahnen der Länge eins zugeordnet werden.

5.1.1 Isolierte Bahnen und Tangentenbifurkationen

Abbildung 14 zeigt eine Abfolge exakter Wirkungsspektren $|T^{(1)}(S)|^2$ für verschiedene Werte von k. Es zeigen sich Peaks, die allesamt periodischen Bahnen der Länge eins zugeordnet werden können. Die Peaks bei $S_+ \approx 1$ und $S_- \approx 4$ gehören zu den beiden Bahnen $+ \equiv [^1/_0]^{(1)}$, $- \equiv [^1/_0]^{(2)}$, die aus den Fixpunkten $\pm\tilde{\mathbf{X}}$ (2.32) für $k = 0$ hervorgehen. Bei $k = 2.45\ldots$ ereignet sich die Tangentenbifurkation $[^1/_1]_1$, in der zwei neue periodische Bahnen der Länge eins entstehen. Bereits vor der Bifurkation kündigen sie sich durch einen Geisterpeak (bei $S = \mathrm{Re}\, S_i \approx 5.3$) an [22,23]. In unmittelbarer Nähe zur Bifurkation ist der Peak der bifurkierenden Bahnen sehr ausgeprägt. Für steigendes k wächst die Wirkungsdifferenz der neuen Bahnen, bis schließlich das Auflösungsvermögen ausreicht, um zwei getrennte Peaks zu erhalten. Für $k = 3.0$ ist dies bereits der Fall.

In einem ersten Test berechnen wir tr $F^n(j)$ in verschiedenen semiklassischen Näherungen und vergleichen die daraus resultierenden Wirkungsspektren mit den exakten. Das Ergebnis für $k = 3.0$ ist in Abbildung 15(a) dargestellt. In allen Näherungen benutzen wir für die beiden aus den Fixpunkten entstandenen Bahnen den isolierten Beitrag (4.48). Die beiden zugehörigen Peaks und insbesondere ihre Position und Höhe werden sehr gut reproduziert. Die erreichte Güte ist das Maß, an dem wir uns im weiteren orientieren wollen. Die verschiedenen Näherungen unterscheiden sich in der Behandlung



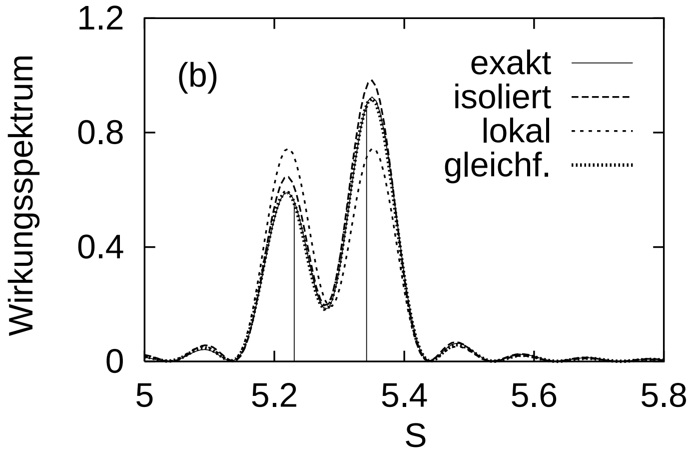


Abbildung 15: (a) Semiklassisch berechnete Wirkungsspektren $|T^{(1)}(S)|^2$ im Vergleich zum exakten Resultat für $k = 3.0$. (b) Der Ausschnitt zeigt die Peaks der bifurkierenden Bahnen. Die Wirkungen der Bahnen sind durch die vertikalen Linien markiert. Von den drei dargestellten Näherungen ist die gleichförmige die genaueste.

der bifurkierenden Bahnen. In die isolierte Näherung fließen sie ebenfalls über (4.48) ein. Der Ausschnitt aus dem Wirkungsspektrum in Abbildung 15(b) verdeutlicht, daß dies zu leicht erhöhten Peaks führt, die immerhin an der richtigen Position liegen. Hier kündigt sich bereits die Divergenz der isolierten Beiträge an der Bifurkation an. Behandelt man die beiden bifurkierenden Bahnen kollektiv in der lokalen Näherung (4.60), so erhält man zwei Peaks gleicher Höhe und erneut eine deutliche Abweichung vom exakten Ergebnis. Mit der gleichförmigen Näherung (4.70) hingegen erreicht man eine hervorragende Übereinstimmung mit dem exakten Resultat.

Wir wählen nun $k = 2.7$, nähern uns also der Bifurkation an, und vergleichen wieder die semiklassischen Peaks der bifurkierenden Bahnen in den verschiedenen Näherungen mit dem exakten Resultat. In Abbildung 16 erkennt man nur noch einen Peak ohne weitere Struktur. Insbesondere gleichen sich die Werte $|T^{(1)}(S_i)|^2$ einander an. Damit gewinnt die lokale Näherung an Genauigkeit. Die Peaks aus der isolierten Näherung sind nun hingegen deutlich zu hoch. Die gleichförmige Näherung behält ihre Gültigkeit.

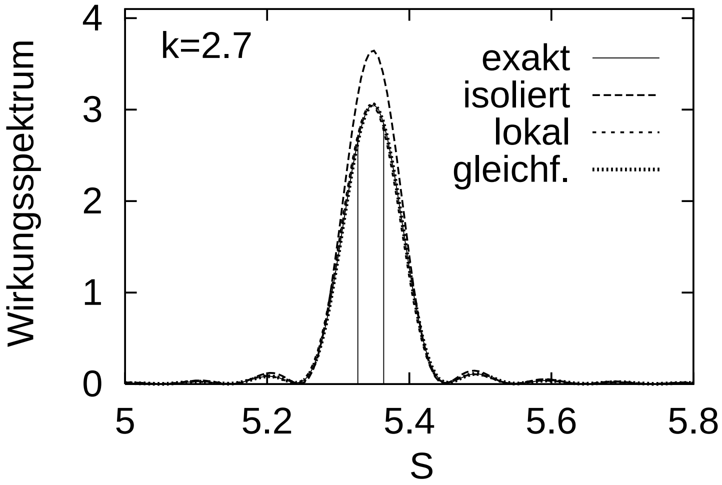


Abbildung 16: Exakter und semiklassisch berechnete Peaks der bifurkierenden Bahnen wie in 15(b), aber für $k = 2.7$

Ein semiklassischer Beitrag zur Spur läßt sich also individuell auf seine Genauigkeit hin überprüfen, indem man den aus ihm resultierenden Peak im Wirkungsspektrum bestimmt und mit dem exakten Wirkungsspektrum vergleicht. Als geeignete Vergleichsgrößen bieten sich die Betragsquadrate $|T(S_i)|^2$ an den Werten der Wirkungen der periodischen Bahnen an. Um unsere Näherungen systematisch zu testen, untersuchen wir in der Folge das Verhalten dieser Peakhöhen als Funktion des Kontrollparameters k. Wir ziehen dabei in der Regel in der semiklassischen Berechnung nur den Beitrag jener periodischer Bahnen heran, die dem zu untersuchenden Peak zugeordnet werden können. In den meisten Fällen reicht das aus. Systematische Abweichungen treten auf, wenn sich Peaks anderer Bahnen überlagern. Man kann diese Bahnen dann hinzunehmen, und wir werden dies auch stellenweise tun. Die Stärke der Methode, nämlich sich meist auf nur wenige Bahnen konzentrieren und ihren Beitrag für sich untersuchen zu können, bleibt davon weitgehend unberührt.

In den Graphen der Abbildung 17 sind die quantenmechanischen und semiklassischen Peakhöhen $|T^{(1)}(S_\pm)|^2$ für die beiden aus den Fixpunkten entstandenen Bahnen $\pm$ als Funktion von k aufgetragen. Semiklassisch haben wir den isolierten Beitrag (4.48) der entsprechenden Bahn herangezogen und wie bereits besprochen die anderen Bahnen vernachlässigt. Man erkennt recht gute Übereinstimmung.

Die Peakhöhen an den Werten der beiden bifurkierenden Bahnen $[{}^1/{}_1]_1^{(0,1)}$ sind in Abbildung 18 dargestellt. Hier sind wieder die drei Stufen isoliert, lokal und gleichförmig der Näherung miteinander verglichen. Die isolierte Näherung ist nur weitab der Bifurkation gültig. Direkt an der Bifurkation divergiert sie, und auch noch in einiger Entfernung liegt sie zu hoch. Der Gültigkeitsbereich der lokalen Näherung ist auf der Seite mit reellen periodischen Bahnen dem der isolierten Näherung komplementär. Die Höhe der Geisterpeaks stimmt mit dem exakten Resultat gut überein. Die gleichförmige Näherung ist im gesamten k–Bereich gültig. Sie interpoliert also sinnvoll zwischen der lokalen

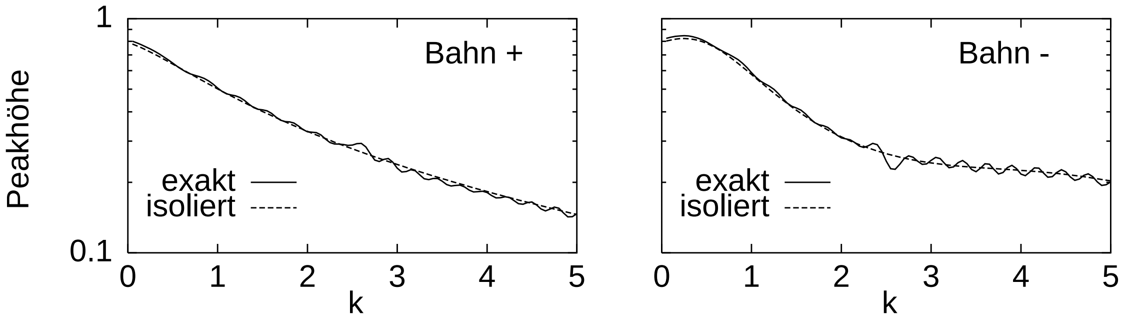


Abbildung 17: Peakhöhen $|T^{(1)}(S_\pm)|^2$ im Wirkungsspektrum an den Werten der Wirkung der beiden Bahnen $\pm$, die aus den Fixpunkten für $k = 0$ hervorgehen. Das semiklassische Resultat wird aus dem isolierten Beitrag (4.48) gewonnen und stimmt mit dem exakten recht gut überein.

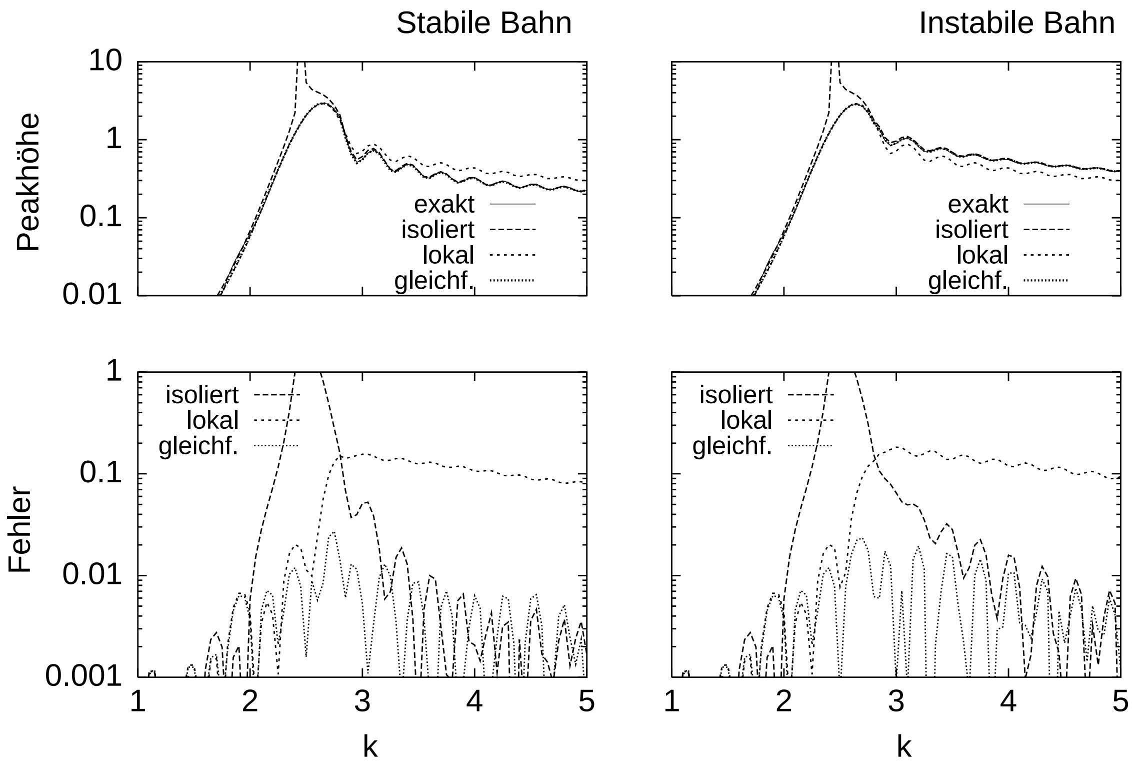


Abbildung 18: Peakhöhen $|T^{(1)}(S_i)|^2$ im Wirkungsspektrum und ihr absoluter Fehler an den Werten der Wirkung der beiden bei $k = 2.45\ldots$ in der Tangentenbifurkation $[{}^1/{}_1]_1$ entstehenden Bahnen. Von den drei Näherungen ist die gleichförmige überall gut. Die lokale Näherung sagt die Peakhöhen in der Nähe der Bifurkation gut voraus. Die isolierte Näherung gibt gute Resultate, wenn die beiden Bahnen weit voneinander entfernt liegen.

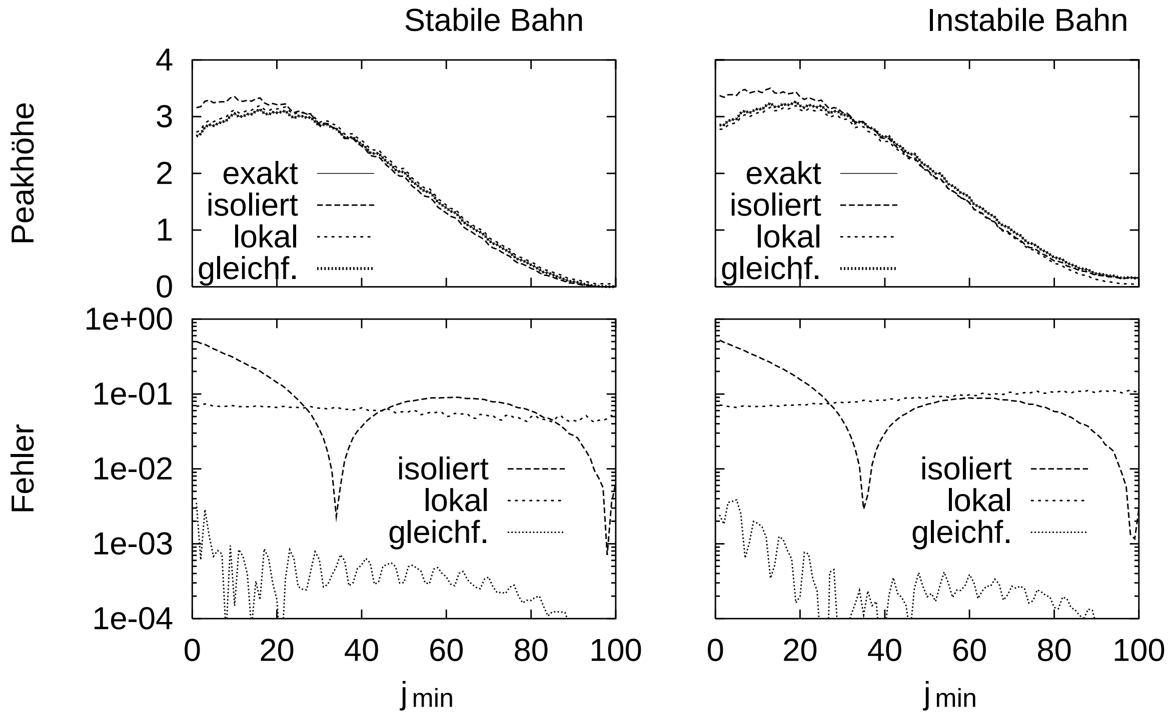


Abbildung 19: Peakhöhen $|T^{(1)}(S_i)|^2$ im Wirkungsspektrum und ihr absoluter Fehler für die Bahnen aus der Tangentenbifurkation $[^1/_1]_1$ bei $k = 2.45\ldots$ für festes $k = 2.7$ als Funktion von $j_{\rm min}$ mit $j_{\rm max} = j_{\rm min} + 63$

und der isolierten Näherung. Es sei erwähnt, daß sich hier wie in den meisten folgenden Bildern die gleichförmige Näherung visuell nicht vom exakten Resultat unterscheiden läßt und auch eine Vergrößerung der Bilder keinen besseren Einblick gewährt. Daher haben wir fast überall auch den absoluten Fehler mit aufgetragen, der erheblich informativer ist. Im aktuellen Fall zeigt er an, daß es einen Übergangsbereich von $k = 2.7$ bis 3.2 gibt, in dem die gleichförmige Näherung den beiden anderen überlegen ist. Dies ist auch in Abbildung 15(b) gut zu erkennen.

Um die Gleichförmigkeit der Näherung vollends abzuklopfen, betrachten wir nun die Peakhöhe für festes k und wachsendes $j_{\rm min}$ bei $j_{\rm max} = j_{\rm min} + 63$. In Abbildung 19 ist das Ergebnis für $k = 2.7$ aufgetragen, in Abbildung 20 jenes für $k = 3.0$. Der Fehler der gleichförmigen Näherung ist um Größenordnungen kleiner als der der anderen Näherungen. Das periodische Verhalten der Peakhöhen mit $j_{\rm min}$ läßt sich aus der linear mit j anwachsenden relativen Phase der beiden isolierten Beiträge verstehen. Der Fehler der isolierten und der gleichförmigen Näherung klingt mit steigendem $j_{\rm min}$ ab, während der der lokalen Näherung ungefähr konstant bleibt.

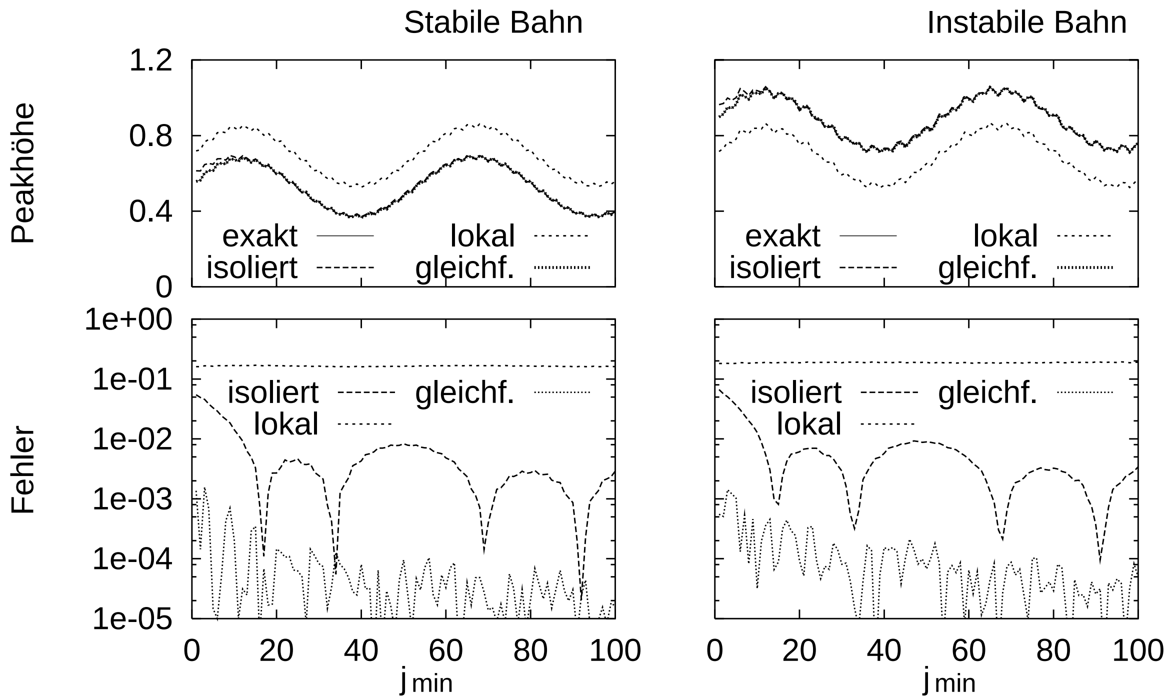


Abbildung 20: Peakhöhen und absoluter Fehler wie in Abbildung 19, aber für $k = 3.0$

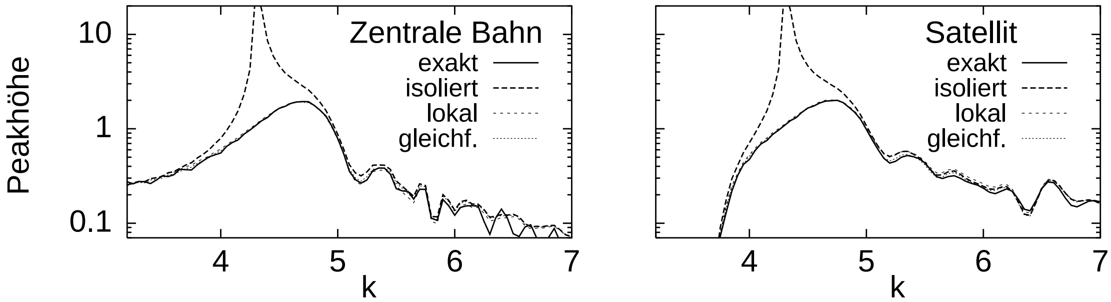


Abbildung 21: Peakhöhen $|T^{(2)}(S_i)|^2$ im Wirkungsspektrum an den Werten der Wirkung der zentralen Bahn der Länge eins und des Satelliten der Länge zwei, die bei $k = 4.31\ldots$ in der Periodenverdopplung $[^1/_2]_3$ koaleszieren

5.1.2 Periodenverdopplungen

Auch die kollektiven Näherungen für die anderen Bifurkationstypen wollen wir anhand der Peakhöhen auf ihre Genauigkeit hin überprüfen. Abbildung 21 zeigt die Peakhöhen $|T^{(2)}(S_i)|^2$ für die beiden periodischen Bahnen, die bei $k = 4.31\ldots$ an der Periodenverdopplung $[^1/_2]_3$ teilnehmen. Die isolierte Näherung divergiert erneut an der Bifurkation. Damit Abweichungen zwischen der gleichförmigen und der lokalen Näherung aus

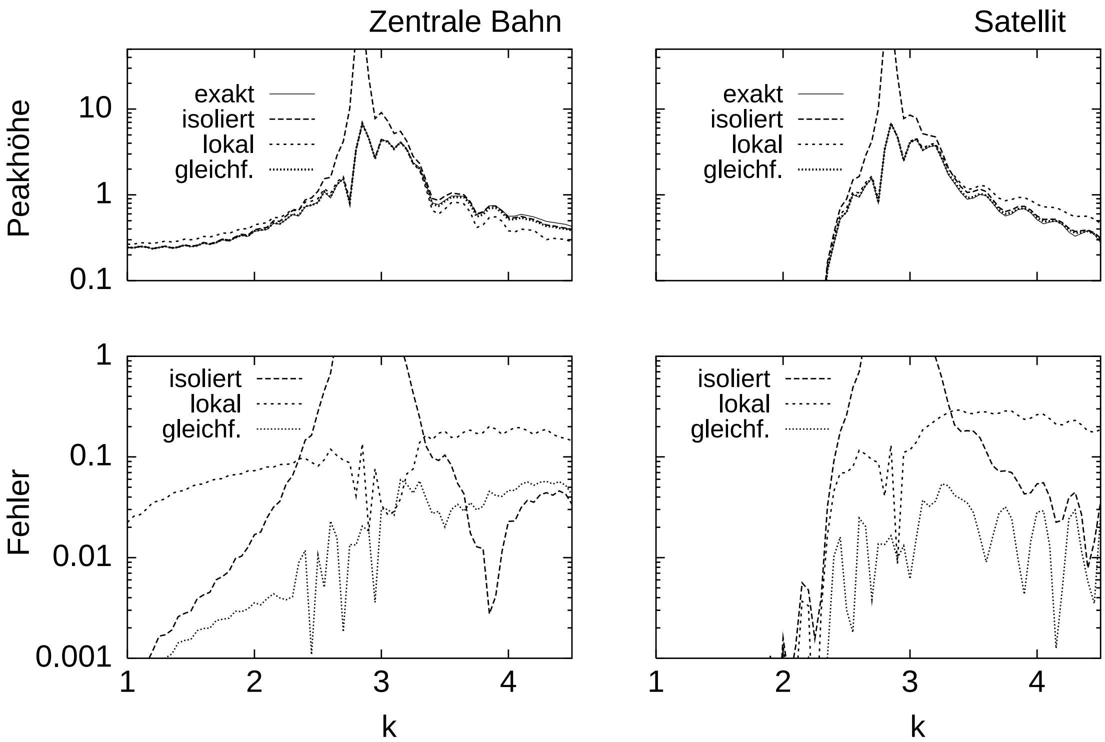


Abbildung 22: Peakhöhen $|T^{(2)}(S_i)|^2$ und absoluter Fehler für die beiden Bahnen, die an der Periodenverdopplung $[{}^1/{}_2]_1$ bei $k = 2.78\ldots$ teilnehmen. Die Bahnen aus der Periodenverdopplung $[{}^1/{}_2]_2$ bei $2.83\ldots$ sind hier ebenfalls berücksichtigt, da sich ihr Peak mit dem zu untersuchenden überlappt. Im Gegensatz zu Abbildung 21 ist nun auch das Zusammenbrechen der lokalen Näherung weitab der Bifurkation zu erkennen.

(4.78) und (4.79) auftreten, müssen wir uns soweit von der Bifurkation entfernen, daß die Beziehung (3.131) zwischen den Stabilitätsfaktoren $\operatorname{tr} M_i$ hinreichend verletzt ist. Ab $k \approx 6$ beginnen sich jedoch Beiträge anderer periodischer Bahnen zu überlagern. Einen Beitrag haben wir bereits berücksichtigt. Damit kommt man aber immer noch nicht in einen k–Bereich, in dem die gewünschten Abweichungen deutlich werden. Anstatt weitere Beiträge hinzuzunehmen und dadurch die Kontrolle zu verlieren, woher Abweichungen vom exakten Resultat herrühren, wenden wir uns anderen Periodenverdopplungen zu, und zwar denen bei $k = 2.78\ldots$ ($[{}^1/{}_2]_1$) und $k = 2.83\ldots$ ($[{}^1/{}_2]_2$). Die Wirkungen der beiden Paare bifurkierender Bahnen liegen (zufälligerweise) nahe beieinander. Hier hat man es also erneut mit einer Überlagerung von Peaks zu tun, die nun zwei kollektiven Beiträgen gleichen Typs zugeordnet werden können. Abbildung 22 stellt die Peakhöhen an den Wirkungen der bei $k = 2.78\ldots$ bifurkierenden Bahnen dar. Die unregelmäßige Struktur rührt von der Interferenz der beiden kollektiven Beiträge her. Die gleichförmige Näherung behandelt beide Paare mittels (4.78) und vermag das quantenmechanische Resultat überall gut zu reproduzieren. Nun wird das Zusammenbrechen der lokalen Näherung weitab der Bifurkation deutlich, wobei für beide Paare (4.79) verwendet wird. Die isolierte Behandlung aller Bahnen divergiert an den Bifurkationen. Insbesondere für den Satelliten erkennt man am absoluten Fehler, daß es wieder einen Übergangsbereich gibt, in dem die Verwendung der gleichförmigen Näherung unabdingbar ist.

Der Geisterbeitrag der Satelliten vor der Bifurkation ist in den Abbildungen 21 und 22 sehr stark unterdrückt. Dies steht in Einklang mit dem asymptotischen Verhalten (4.82) des kollektiven Beitrags (4.78) und ist Ausdruck des Umstands, daß der Satellitengeist nicht auf der nach der Methode des stärksten Abklingens des Integranden deformierten Integrationskontur liegt.

5.1.3 Periodenverdreifachungen

Beim Auffinden der periodischen Bahnen des Kreisels haben wir bereits festgestellt, daß Periodenverdreifachungen immer von Tangentenbifurkationen des Satelliten begleitet werden. Wie sich in Abbildung 23 zeigt, ist die Wirkungsdifferenz des dabei involvierten zusätzlichen Satelliten so klein, daß man mit Näherungen auf der Basis von Bifurkationen der Kodimension eins nicht mehr auskommt. Vor der Tangentenbifurkation $[^3/_1]_1$ werden in der entsprechend bezeichneten Näherung die beiden Satelliten kollektiv und der zentrale Orbit isoliert behandelt. Jenseits der Periodenverdreifachung $[^1/_3]_1$ gehen die daran beteiligten Bahnen kollektiv ein, während nun der zusätzliche Satellit mit seinem isolierten Beitrag genommen wird. Zum Vergleich ist dargestellt, zu welchem Resultat man mit der isolierten Behandlung aller drei Bahnen kommt. Aus Abbildung 23 ist weiter ersichtlich, daß die kollektive Behandlung aller drei periodischen Bahnen gemäß (4.112) wieder zu einer guten Übereinstimmung der semiklassischen Voraussage mit den exakten Peakhöhen führt. Semiklassisch spürt man somit Bifurkationen der Kodimension zwei, selbst wenn man nur einen Parameter verändert. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da selbst Bifurkationen der Kodimension eins semiklassisch eine gewisse Reichweite in k haben, sich also nicht nur punktuell für den Bifurkationswert von k bemerkbar machen. Wir erinnern an das Abstandsmaß $J\Delta S$, welches groß sein muß, damit kollektive Beiträge in isolierte zerfallen. Erst wenn man die Summationsgrenzen in (5.1) zu sehr großen Werten verschiebt, reichen hier in analoger Weise die Näherungen zur Kodimension eins wieder aus.

Die Peakhöhen der Geistersatelliten fallen für kleiner werdende Werte von k rapide ab. Verantwortlich hierfür ist der Stokesübergang, der die Geister bereits für $k \lesssim 1.84$ irrelevant werden läßt. Die Näherungen mit Kodimension zwei spiegeln sehr gut wider, daß dieser Übergang nicht schlagartig, sondern allmählich vonstatten geht.

5.1.4 Periodenvervierfachungen

Wir wenden uns nun der Periodenvervierfachung $[^1/_4]_1$ bei $k = 1.01\ldots$ zu. Sie ist vom Typ $|a/b| > 1$ für das Verhältnis der Koeffizienten in der Normalform (3.140). Auf der einen Seite gibt es also zwei Geistersatelliten, auf der anderen zwei reelle Satelliten. Die exakten Peakhöhen sind in Abbildung 24 mit den semiklassischen Vorhersagen der

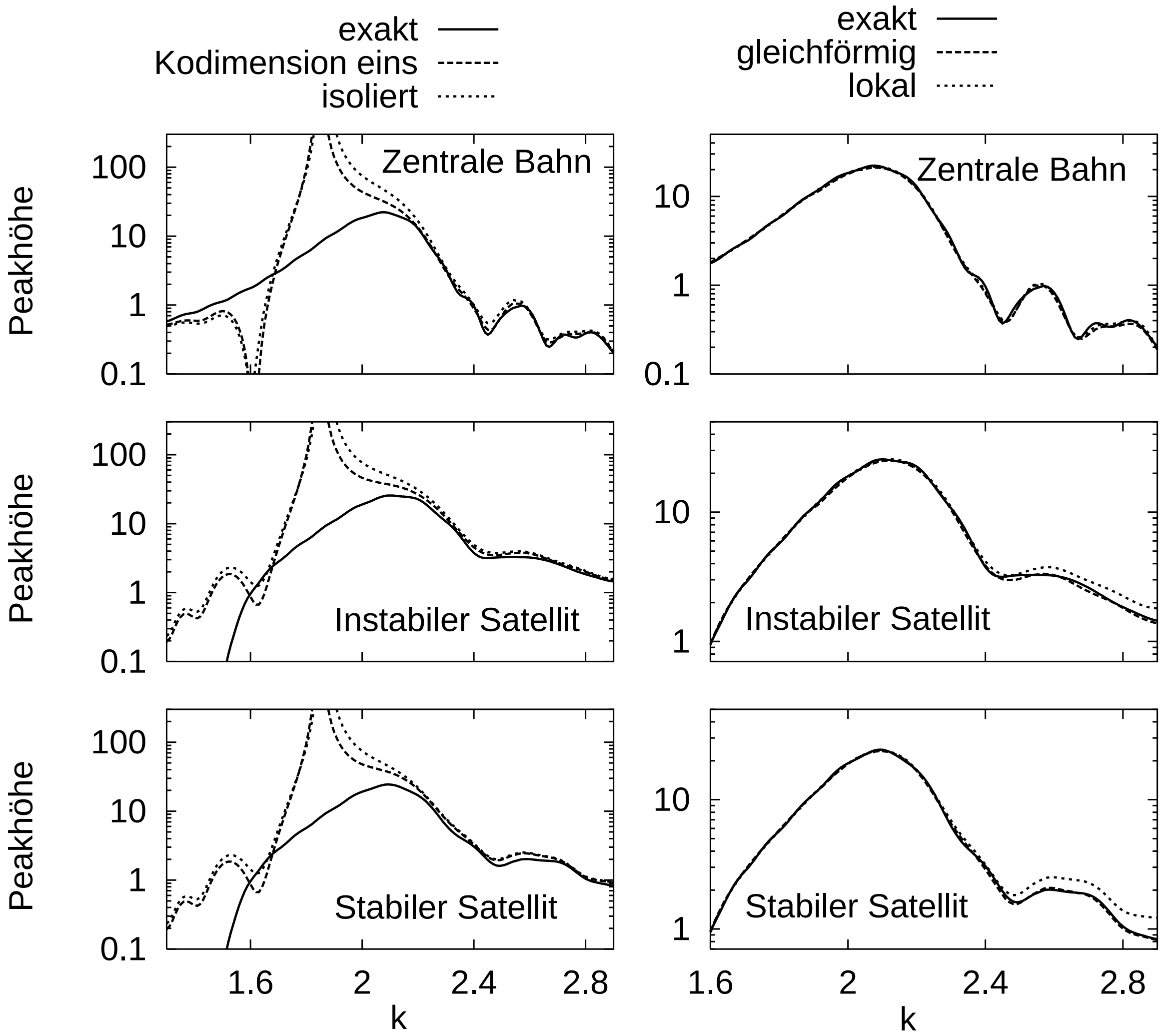


Abbildung 23: Peakhöhen $|T^{(3)}(S_i)|^2$ für die Bahnen aus der Periodenverdreifachung $[^1/_3]_1$ bei $k = 1.859\ldots$ und den zusätzlichen (stabilen) Satelliten aus der Tangentenbifurkation $[^3/_1]_1$ bei $k = 1.853\ldots$. Linke Spalte: In der Nähe der Bifurkation führen die kollektiven Beiträge der Kodimension eins zu Abweichungen, wie wir sie bisher nur von der isolierten Näherung kennen. Rechte Spalte: Die kollektive Behandlung aller drei Bahnen führt zu einer guten Übereinstimmung mit dem exakten Resultat.

isolierten, lokalen und gleichförmigen Näherung verglichen. Wieder ist die gleichförmige Näherung im gesamten k–Bereich verwendbar und vom exakten Ergebnis nicht zu unterscheiden. Die isolierte Näherung ist erst in großer Entfernung zur Bifurkation gültig. Der Zusammenbruch der lokalen Näherung ist in der logarithmischen Darstellung nicht deutlich zu erkennen, kann jedoch in der nichtlogarithmischen Skala ausgemacht werden.

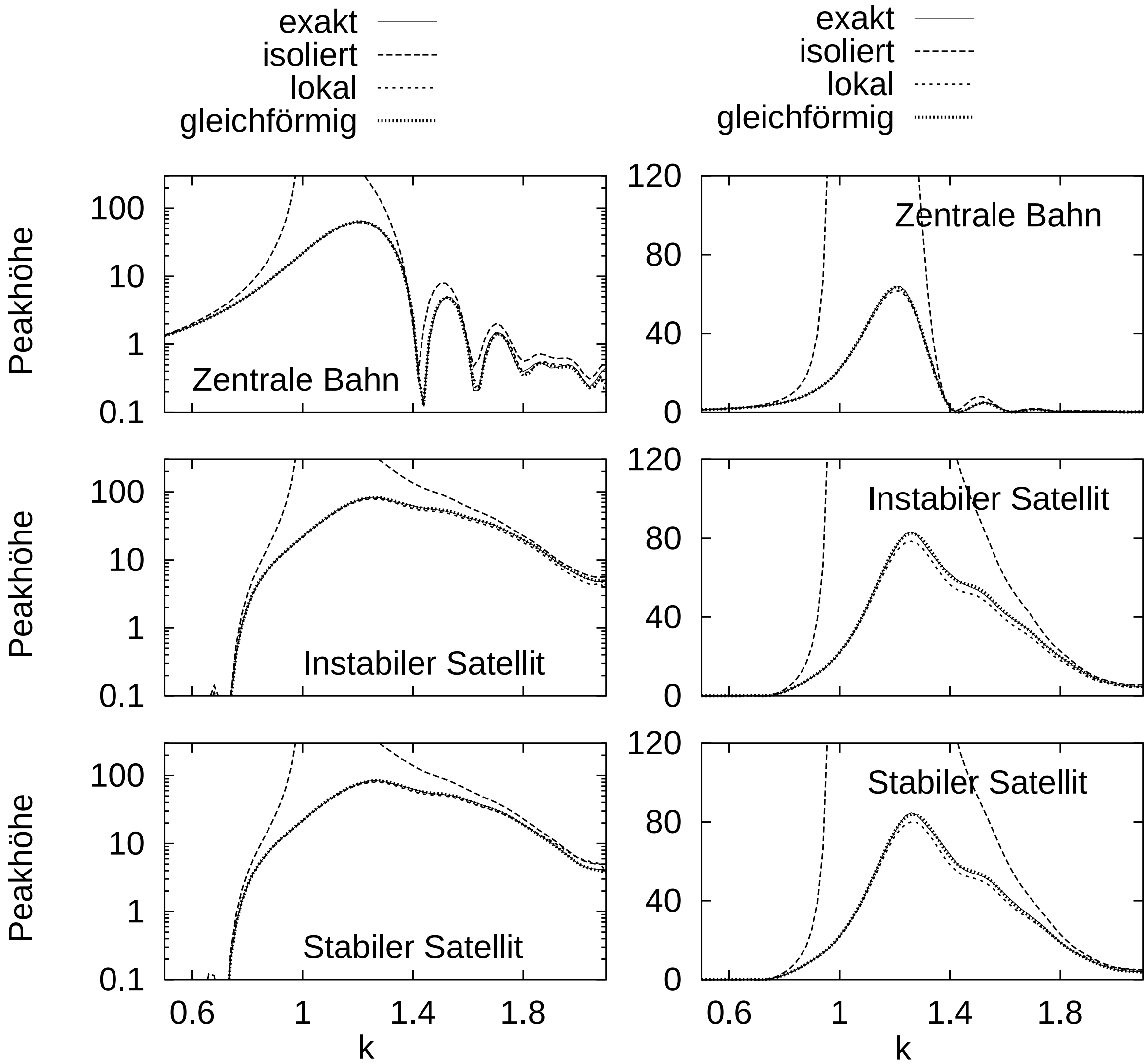


Abbildung 24: Peakhöhen $|T^{(4)}(S_i)|^2$ an den Werten der Wirkung der Bahnen aus der Periodenvervierfachung $[^1/_4]_1$ bei $k = 1.01\ldots$. In der logarithmischen Darstellung ist die starke Unterdrückung der Satellitengeister gut zu erkennen. In der nichtlogarithmischen Darstellung wird das Zusammenbrechen der lokalen Näherung für die Satelliten ab $k \approx 1.2$ deutlich.

5.1.5 Stokesübergänge in der Nähe von Tangentenbifurkationen

Wir kehren nun wieder zu den Tangentenbifurkationen zurück und betrachten den Stokesübergang des darin involvierten Geistes mit $\operatorname{Im} S > 0$. Dieser Stokesübergang kann mit dominanten periodischen Bahnen verschiedener Periode vonstatten gehen. Einen Fall haben wir bereits diskutiert, nämlich das Ausschalten der Satelliten dreifacher Periodenlänge durch den zentralen Orbit in Abschnitt 5.1.3. Ein weiterer für die Berechnung des Quasienergiespektrums relevanter Fall ist das Ausschalten eines Geisterbeitrags durch einen Satelliten gleicher Periodenlänge. Die kollektiven Beiträge

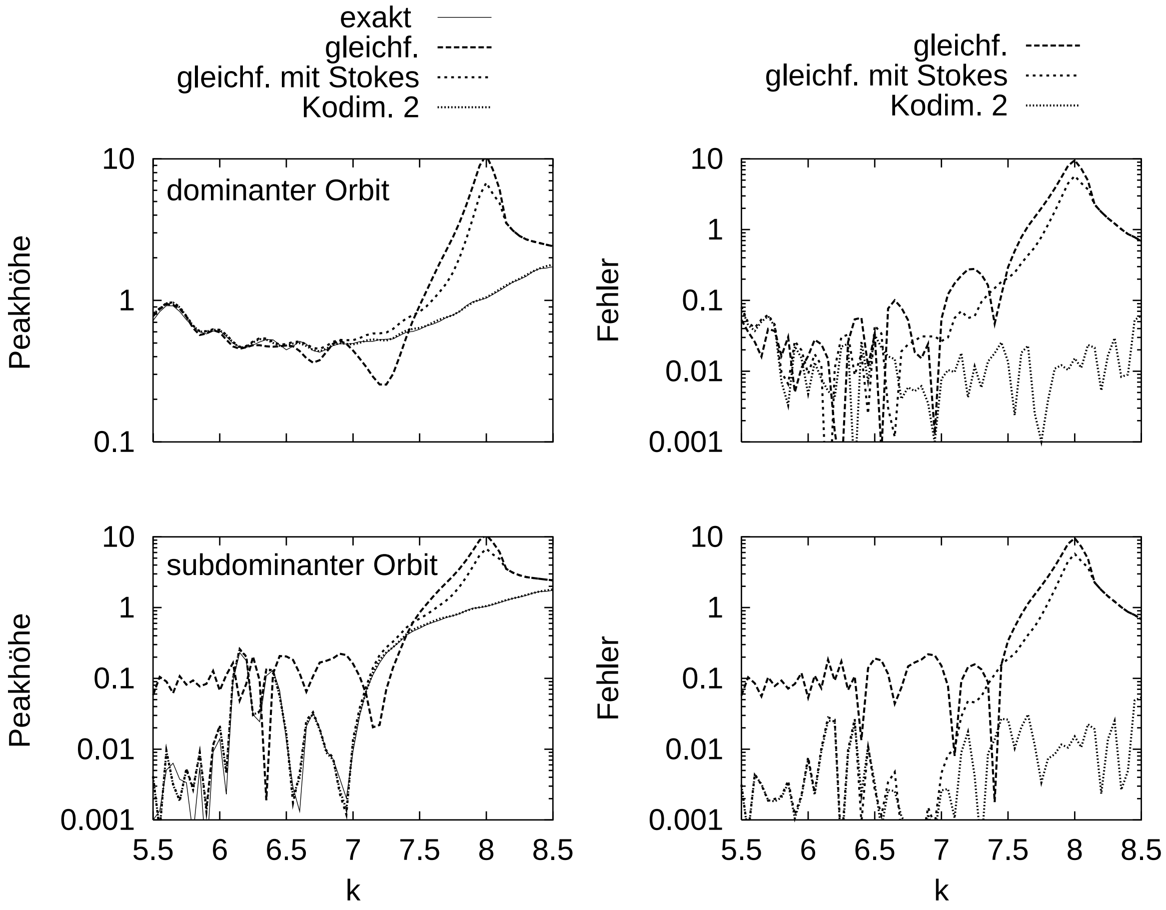


Abbildung 25: Peakhöhen $|T^{(2)}(S_\pm)|^2$ an den Werten der Wirkung der dominanten Bahn und des subdominanten Geistes aus der Tangentenbifurkation $[^2/_1]_4$ bei $k = 8.12\ldots$. Als Nachfolger des Geistes ist für $k > 8.12\ldots$ die Peakhöhe an der Wirkung der stabilen reellen Bahn gezeigt.

unter Einschluß des dominanten Orbits wurden in Abschnitt 4.6.1 bereitgestellt. Die lokale Behandlung des Übergangs wurde in Abschnitt 4.4 diskutiert.

Bei der Untersuchung unserer Kreiselvariante tritt die Bedeutung der Stokesübergänge in der erwähnten Form insbesondere für einige Beiträge zu den Spuren $\mathrm{tr}\, F^2$ und $\mathrm{tr}\, F^3$ hervor. Wir diskutieren hier exemplarisch einen Beitrag zu $\mathrm{tr}\, F^2$, bei dem zur Erzielung guter Ergebnisse die kollektive Behandlung einschließlich des dominanten Orbits notwendig ist. An der in Frage stehenden Tangentenbifurkation $[^2/_1]_4$ bei $k = 8.12\ldots$ sind zwei periodische Bahnen der Länge zwei beteiligt. In unmittelbarer Phasenraumnachbarschaft der neu entstehenden Bahnen befindet sich bereits ein anderer periodischer Orbit der Periode zwei. Er ist in der Tangentenbifurkation $[^2/_1]_1$ bei $k = 4.87\ldots$ entstanden, zunächst als stabiler Orbit; er ist zwischen $k \approx 5.20$ und $k \approx 7.60$ invers instabil und dann wieder bis $k \approx 8.20$ stabil. Diese Bahn fungiert als dominanter Orbit im Stokesübergang bei $k \approx 7.98$. Bei diesem Parameterwert ist die Spur seiner Stabilitätsmatrix $\mathrm{tr}\, M \approx 1$. Er ist dort also nicht gut isoliert. Dies spiegelt sich auch in den Peakhöhen des Wirkungsspektrums wider. In Abbildung 25 ist die exakte Peakhöhe bei der Wirkung S_+ des dominanten Orbits und beim Realteil der Wirkung S_- des subdominanten Geistes mit verschiedenen semiklassischen Näherungen verglichen, die sich in der Behandlung des Stokesüberganges unterscheiden. Die einfache gleichförmige Näherung ignoriert den Stokesübergang und führt dort, wo Geister irrelevant sind, zu einem deutlich überhöhten Peak bei S_-. Auch direkt an der Bifurkation sind beide Peaks deutlich überhöht. Berücksichtigt man den Stokesübergang durch Multiplikation des Stokesfaktors (4.52) an den Geisterbeitrag, so stimmt das Ergebnis für kleine k–Werte, wo der Beitrag bereits fast vollständig unterdrückt ist, sehr gut mit dem exakten überein. Direkt an der Bifurkation und dem Übergang wird die Peakhöhe jedoch nicht hinreichend regularisiert. Dies gelingt erst mit der kollektiven Behandlung aller drei an der Bifurkation und dem Übergang beteiligten Bahnen. Dann erhält man ein Ergebnis, das über den gesamten k–Bereich gut ist. Den untersuchten Peaks überlagern sich abseits der Bifurkation und des Stokesüberganges auch die zweier weiterer Bahnen, die hier in allen Näherungen mit ihren isolierten Beiträgen mitberücksichtigt wurden. Aus ihnen resultieren die deutlich sichtbaren erratischen Fluktuationen der Peakhöhe des subdominanten Orbits.

Die Abfolge eines Stokesüberganges eines Periode–zwei–Orbits mit einem dominanten Orbit der Länge eins diskutieren wir in Abschnitt 5.2.2. In Abschnitt 5.2.3 behandeln wir schließlich den Beitrag eines doppelt gebrochenen Torus.

5.2 Spuren des Floquetoperators

Wir wenden uns nun den eigentlichen Spuren der Floquetoperators zu und stellen die numerischen Daten zusammen, die später zur Berechnung des Quasienergiespektrums herangezogen werden. Wir wollen dabei den gesamten Übergang von regulärem zu ausgeprägt chaotischem Verhalten überdecken, welcher im Intervall $0 \leq k \lesssim 10$ vonstatten geht.

Mit vertretbarem Aufwand lassen sich in diesem Intervall die Spuren $\operatorname{tr} F^n$ mit den Potenzen $n = 1, 2, 3$ berechnen. In den ausgefeiltesten Näherungen erhält man dann selbst für kleine Werte $j = 1, 2, 3$ der Drehimpulsquantenzahl gute Ergebnisse. Der Fehler verhält sich in diesen Näherungen mit steigendem $J = j + \frac{1}{2}$ wie J^{-1}. Ebensogute Ergebnisse werden wir in Abschnitt (5.5) für die halbzahligen Werte $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ kennenlernen.

Die nicht ganz so elaborierten Näherungen (etwa mit isolierten oder lokalen Beiträgen oder solchen zu geringer Kodimension, schließlich auch Stokesübergänge mißachtende) führen in recht ausgedehnten Bereichen des Parameterraums selbst bei großen Werten von j zu einem um Größenordnungen erhöhten Fehler.

Für die periodischen Bahnen und Bifurkationen verweisen wir auf Abschnitt 3.6.

5.2.1 Die erste Potenz

Die Spur der ersten Potenz des Floquetoperators $\mathrm{tr}\, F$ ist semiklassisch am leichtesten zugänglich — in sie fließt die geringste Zahl periodischer Bahnen ein, nämlich nur jede Bahn mit Periode eins. Für die erste Potenz sind allein die Tangentenbifurkationen der Periode–eins–Bahnen von Bedeutung, da alle anderen Bifurkationen erst unter Iteration der Abbildung sichtbar werden. Jede Bifurkation definiert einen Cluster aus den an ihr beteiligten Bahnen. Die Cluster können über den gesamten Parameterbereich unverändert gelassen werden, da alle Bahnen für die betrachteten Kopplungsstärken maximal an einer Bifurkation beteiligt sind.

Für $j = 1$ genügt die erste Spur und die Kenntnis der Determinante bereits zur Festlegung des gesamten aus drei Niveaus bestehenden Quasienergiespektrums. In Abbildung 26 sind Real- und Imaginärteil der Spur für $j = 1$ in verschiedenen Näherungen gegen k aufgetragen. Auch der absolute Fehler $|\,\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{sk}}|$ ist angegeben. Hier steht „qm“ für quantenmechanisch und „sk“ für semiklassisch. Wir diskutieren kurz die verschiedenen Stufen der Näherung: In der *isolierten* Näherung werden hier nur die reellen Bahnen berücksichtigt. Sie entspricht also der naiven Anwendung der nur für hyperbolische Systeme gültigen Gutzwillerschen Spurformel. An den beiden Tangentenbifurkationen $[^1/_1]_{1,2}$ bei $k = 2.45\ldots$ und $k = 8.81\ldots$ divergiert sie jeweils auf der Seite der Bifurkation, auf der die bifurkierenden Bahnen reelle Koordinaten haben. Die reelle Näherung mit *Kodimension eins* regularisiert das Verhalten auf dieser Seite mittels des kollektiven Beitrags (4.70) für Tangentenbifurkationen. Auf der anderen Seite der Bifurkation ist das Ergebnis in beiden Näherungen endlich, aber grob falsch. Offensichtlich rührt dies aus der Vernachlässigung der *Geister*beiträge her. Sie haben wir im nächsten Schritt mit ihrem kollektiven Beitrag hinzugenommen. Dadurch erhält man eine bereits recht ordentliche Näherung. Für die betrachtete Spur sind *Stokes*übergänge nach erstem Anschein nicht sehr wichtig. Das Ausschalten irrelevant werdender Geister mittels des Stokesfaktors (4.52) führt jedenfalls zu keinem ausgeprägten Gewinn. Schließt man jedoch den dominanten Orbit in die kollektive Betrachtungsweise ein (Abschnitt 4.6.1), so läßt sich mit der resultierenden Näherung der *Kodimension zwei* eine weitere Verbesserung erzielen. Für die betrachtete Spur gelingt dies insbesondere im Bereich $0.5 < k < 3$. Es sind die periodischen Bahnen aus der Tangentenbifurkation $[^1/_1]_1$ bei $k = 2.45\ldots$ und ihr dominanter Orbit $[^1/_0]^{(2)}$, die der skizzierten Verfahrensweise aufgeschlossen gegenüberstehen.

Auch in den Abbildungen 27 für $j = 3$ und 28 für $j = 5$ wird die leichte Überlegenheit der Näherung mit Kodimension zwei für kleine k–Werte deutlich. Weit rechts der Bifurkation, insbesondere im Bereich $4 < k < 6$, ist sie allerdings ein wenig schlechter als die kollektive Näherung mit Clustern der Kodimension eins. Der Unterschied zwischen den Geisternäherungen mit und ohne Stokesfaktoren ist dagegen kaum noch auszumachen. Im Vergleich zu $j = 1$ schrumpfen für die Näherungen ohne Geister die k–Intervalle mit ausgeprägtem Fehler allmählich zusammen. Auch in Abbildung 29 mit

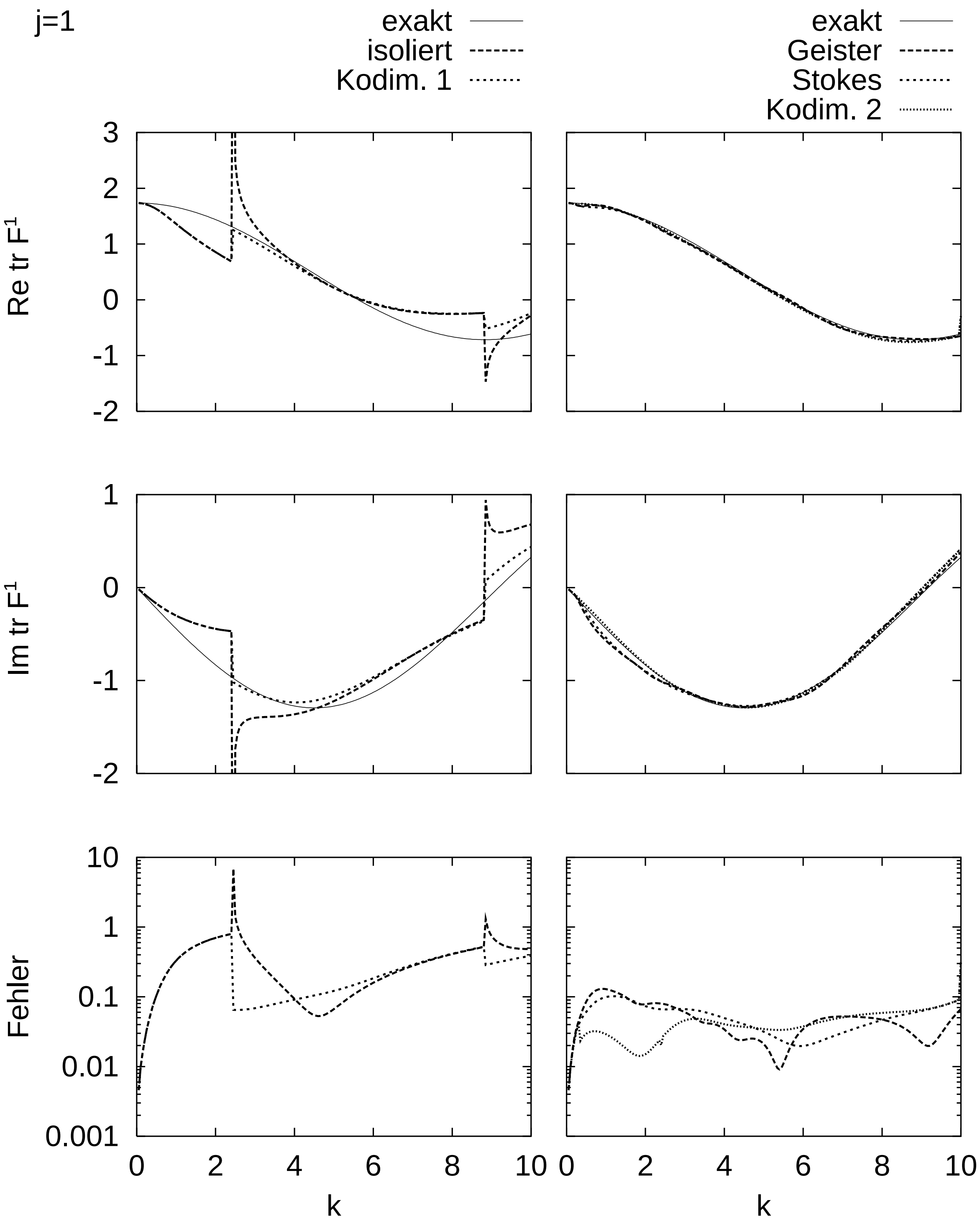


Abbildung 26: Real- und Imaginärteil der Spur $\mathrm{tr}\, F^1$ und der absolute Fehler $|\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{sk}}|$ in verschiedenen semiklassischen Näherungen als Funktion von k für $j = 1$. Isoliert: nur isolierte Beiträge reeller Orbits. Kodimension eins: kollektive Beiträge reeller Orbits. Geister: kollektive Beiträge von reellen Orbits und Geistern. Stokes: zusätzlich Berücksichtigung von Stokesübergängen. Kodimension zwei: bei einem Stokesübergang werden die Geister und der dominante Orbit gemeinsam behandelt.

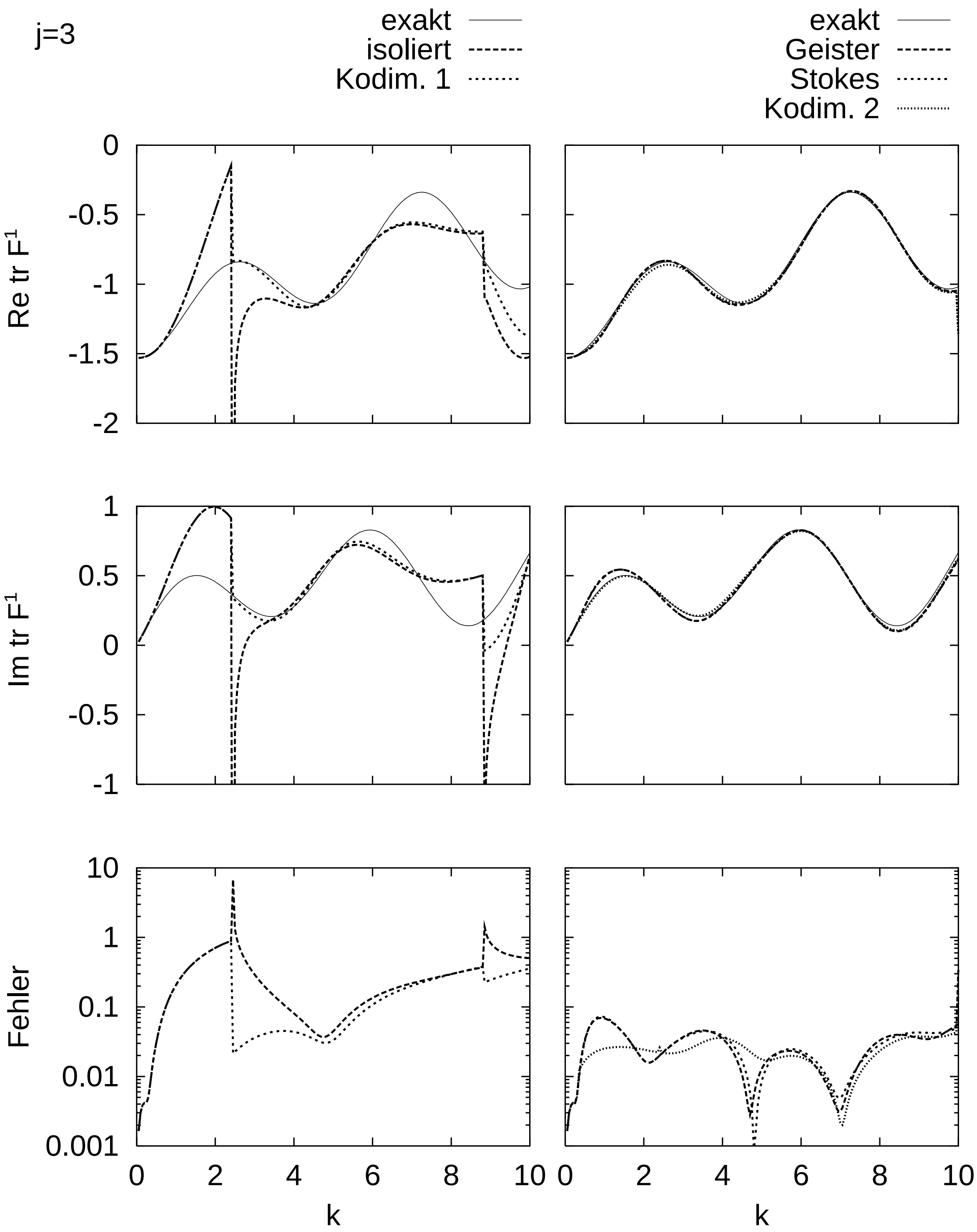


Abbildung 27: Real- und Imaginärteil der Spur tr F^1 und der absolute Fehler $|\operatorname{tr} F^1_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^1_{\mathrm{sk}}|$ wie in Abbildung 26, aber für $j = 3$

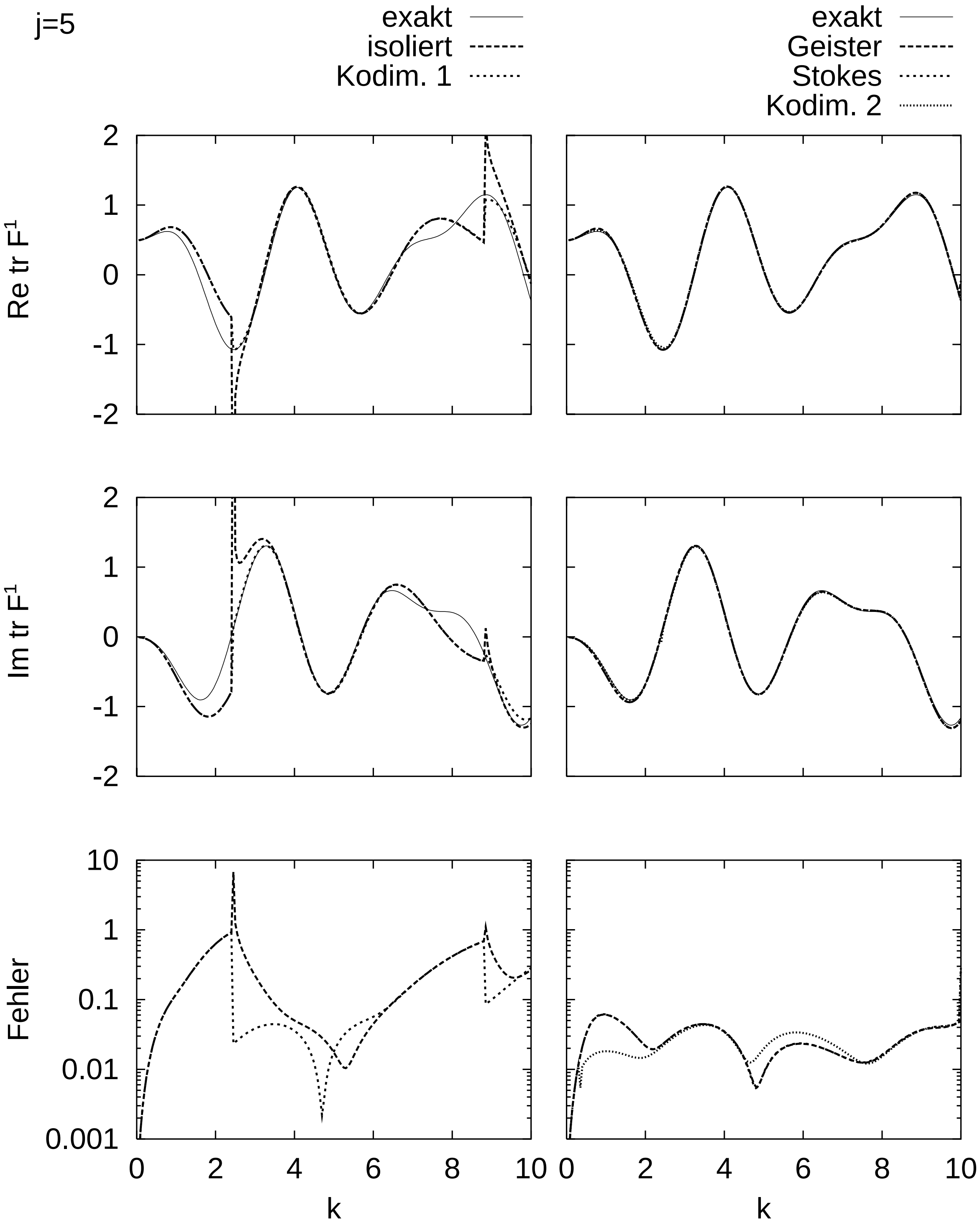


Abbildung 28: Real- und Imaginärteil der Spur tr F^1 und der absolute Fehler $|\operatorname{tr} F^1_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^1_{\mathrm{sk}}|$ wie in Abbildung 26, aber für $j = 5$

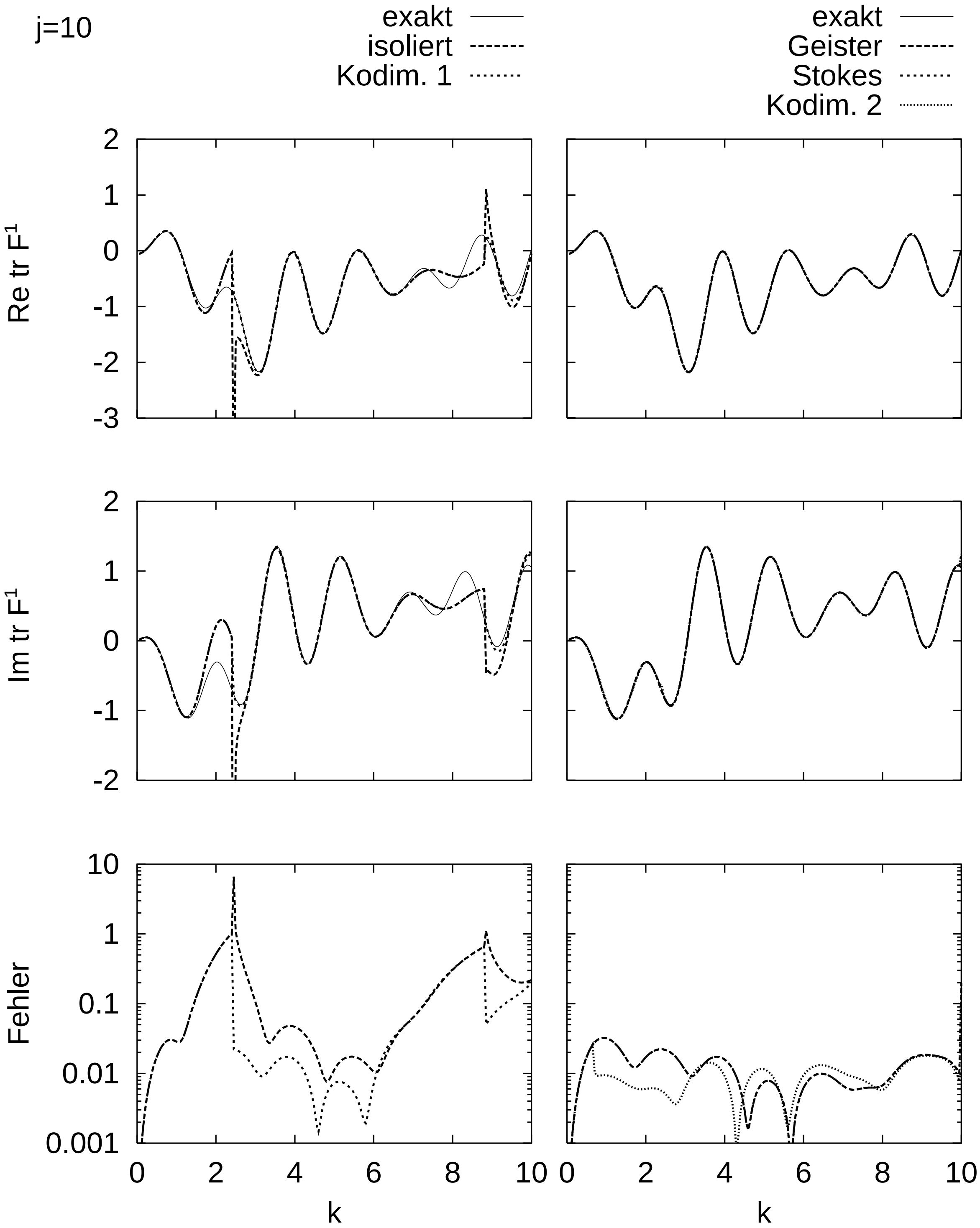


Abbildung 29: Real- und Imaginärteil der Spur $\mathrm{tr}\, F^1$ und der absolute Fehler $|\,\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{sk}}|$ wie in Abbildung 26, aber für $j = 10$

$j = 10$ setzt sich dieser Trend fort. Mit steigendem j werden Geisterbeiträge exponentiell unterdrückt; kollektive Beiträge zerfallen schneller (betrachtet als Funktion von k) in ihre asymptotische Gestalt, also die Summen isolierter Beiträge. Dennoch bleiben die Bereiche, in denen man um die Verwendung kollektiver Beiträge nicht herumkommt, recht groß.

Der mittlere absolute Fehler in der besten Näherung ist etwa 0.1 für $j = 1$, 0.03 für $j = 3$, 0.02 für $j = 5$ und 0.01 für $j = 10$. Er sinkt also grob mit $1/j$. Genaueres lernt man aus dem Verhalten des Fehler für feste Werte von k über einen größeren Bereich von j. Wir betrachten zunächst $k = 2.7$ und vergleichen die isolierte mit der gleichförmigen Näherung der Kodimension eins (Abbildung 30). Man befindet sich in unmittelbarer Nachbarschaft der Tangentenbifurkation $[^1/_1]_1$ bei $k = 2.45\ldots$. Nur reelle Orbits fließen auf dieser Seite der Bifurkation in die semiklassischen Ausdrücke ein; die nächste Tangentenbifurkation $[^1/_1]_2$ bei $k = 8.81\ldots$ ist noch weit weg. Real- und Imaginärteil oszillieren als Funktion von j, was sich semiklassisch durch die Interferenz der verschiedenen Beiträge erklären läßt. Die Fouriertransformation bezüglich j führt ja zu dem ausführlich diskutierten Wirkungsspektrum mit seinen ausgeprägten Peaks an den Wirkungen periodischer Bahnen. In Abbildung 30 ist $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,F^1(j)$ zum einen exakt über einen größeren Bereich von j aufgetragen, um die Oszillation zu illustrieren; zum anderen wird diese Größe in einem kleineren Ausschnitt mit den beiden semiklassischen Näherungen verglichen. Unser Hauptinteresse gilt dem Fehler der gleichförmigen Näherung, der in der doppellogarithmischen Darstellung eine algebraische Abhängigkeit mit einem Exponenten von eins offenbart,

$$|\,\mathrm{tr}\,F^1_{\mathrm{gleichf}} - \mathrm{tr}\,F^1_{\mathrm{qm}}| = \mathcal{O}(1/J)\ . \tag{5.2}$$

Die isolierte Näherung liefert einen Fehler, der um mindestens eine Größenordnung darüber liegt. Selbst bei $j = 100$ haben sich beide Fehler noch nicht aneinander angeglichen. Auch den Fehler der lokalen Näherung haben wir hier noch einmal angegeben, der Übersichtlichkeit wegen aber auf die Darstellung von $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,F^1$ in dieser Näherung verzichtet. Bei diesem und bei anderen k–Werten stellt sich — wie schon beim Wirkungsspektrum, Abbildung 19 — heraus, daß der Fehler der lokalen Näherung im großen und ganzen j–unabhängig ist.

Mit wachsender Entfernung zur Bifurkation nähert sich der isolierte Fehler dem gleichförmigen an. Ein mit j unveränderlicher Größenordnungsunterschied bleibt jedoch bestehen. So liegt in Abbildung 31 der Fehler der isolierten Näherung für $k = 3.0$ über den gesamten j–Bereich etwa eine Größenordnung über dem der gleichförmigen; für $k = 3.5$ ist der Unterschied noch etwas größer als eine halbe Größenordnung. Dies deutet auf ein asymptotisches Verhalten

$$|\,\mathrm{tr}\,F^1_{\mathrm{isoliert}} - \mathrm{tr}\,F^1_{\mathrm{gleichf}}| = \mathcal{O}(1/J) \tag{5.3}$$

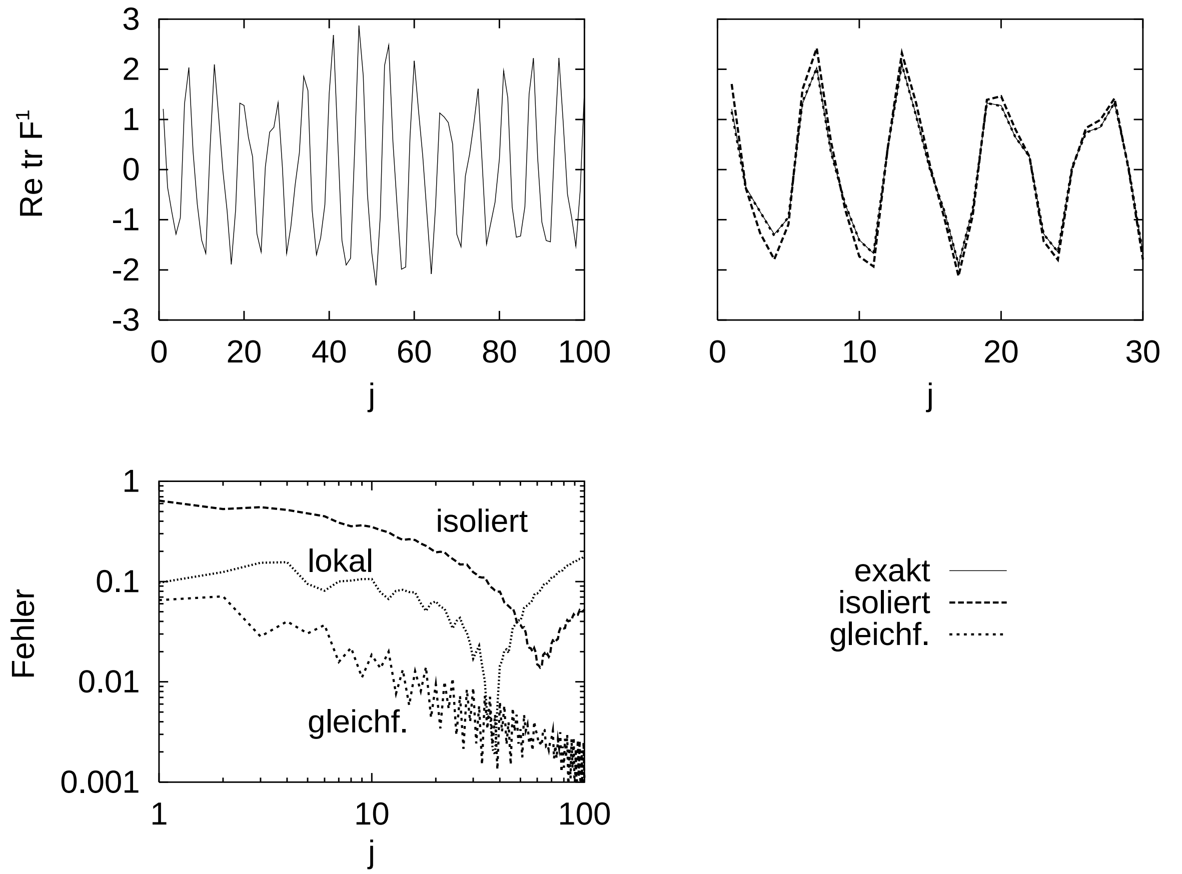


Abbildung 30: Real- und Imaginärteil der Spur $\operatorname{tr} F^1$ und der absolute Fehler $|\operatorname{tr} F^1_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^1_{\mathrm{sk}}|$ in verschiedenen semiklassischen Näherungen als Funktion von j für $k = 2.7$. Alle beitragenden Orbits ($[{}^1/_0]^{(1,2)}$, $[{}^1/_1]_1^{(0,1)}$) sind reell. Die trivialen Orbits $[{}^1/_0]^{(1,2)}$ tragen immer mit ihrem isolierten Beitrag bei. Die Orbits aus der Bifurkation $[{}^1/_1]_1$ gehen entweder mit ihrem isolierten Beitrag oder mit dem kollektiven Beitrag in lokaler bzw. gleichförmiger Näherung ein.

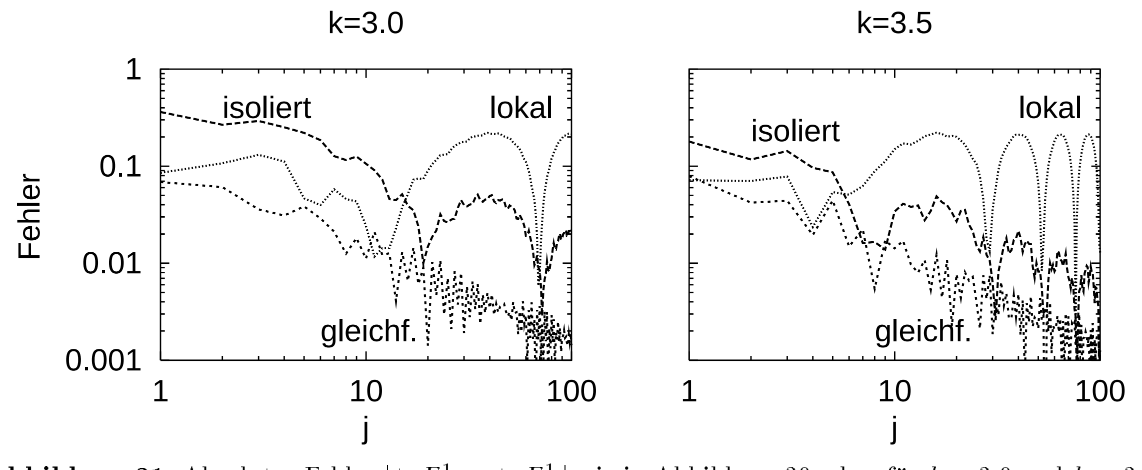


Abbildung 31: Absoluter Fehler $|\operatorname{tr} F^1_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^1_{\mathrm{sk}}|$ wie in Abbildung 30, aber für $k = 3.0$ und $k = 3.5$

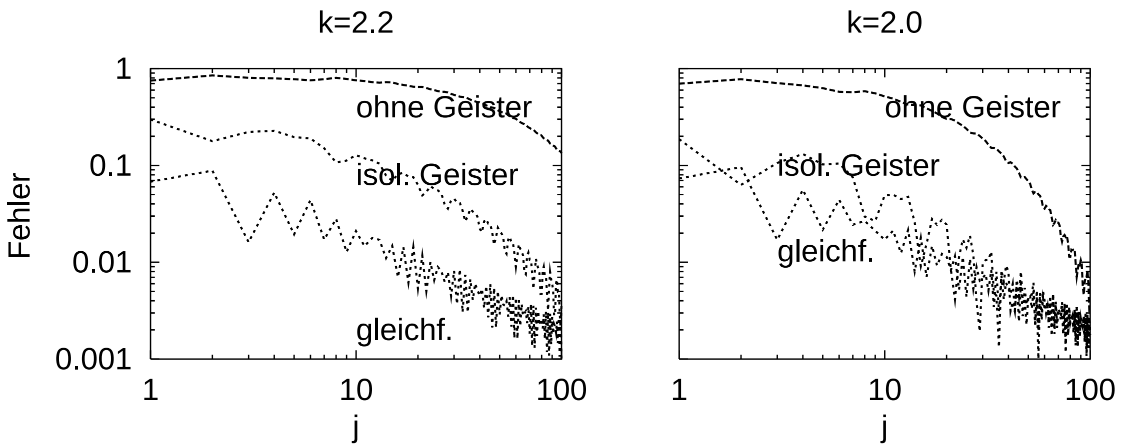


Abbildung 32: Absoluter Fehler $|\operatorname{tr} F^1_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^1_{\mathrm{sk}}|$ der ersten Spur wie in Abbildung 30, aber für $k = 2.2$ und $k = 2.0$. Nun sind die bifurkierenden Bahnen Geister. Verglichen werden die isolierten Näherungen ohne und mit Geistern mit der gleichförmigen Näherung mit Geistern.

hin. Tatsächlich ist auch die Differenz der kollektiven Beiträge zu dem führenden Term ihrer asymptotischen Entwicklung in $J \to \infty$ von dieser Größenordnung: Isolierte und kollektive Beiträge unterscheiden sich unter Benutzung von (4.62) um $\mathcal{O}(1/J)$.

Auf der anderen Seite der Bifurkation vergleichen wir in Abbildung 32 bei $k = 2.2$ und $k = 2.0$ die isolierten Näherungen ohne und mit Geistern mit der gleichförmigen Näherung. Erneut offenbart sich für den Fehler der letzteren ein algebraisches Abklingen nach (5.2). Die isolierte Behandlung der Geister liefert für $k = 2.2$ einen etwa um eine Größenordnung erhöhten Fehler, der sich langsam dem der gleichförmigen Näherung angleicht. Ohne Geister ist man noch sehr weit von einer vernünftigen Näherung entfernt. Selbst die Tatsache, daß der Geisterbeitrag asymptotisch exponentiell mit $\exp[-J \operatorname{Im} S]$ unterdrückt wird, scheint von unwesentlichem Nutzen zu sein. In einem einfachlogarithmischen Plot zeigt sich, daß der Fehler ohne Geister zunächst exponentiell abfällt. Extrapoliert man dieses Verhalten, so sollte er für $k = 2.2$ etwa bei $j = 400$ in die Größenordnung des Fehlers der beiden anderen Näherungen gelangen. Für $k = 2.0$ ist man bereits so weit von der Bifurkation entfernt, daß man die Geister ab $j \approx 40$ auch isoliert behandeln kann. Ab $j \approx 120$ wird man sie schließlich vernachlässigen können.

5.2.2 Die zweite Potenz

Zur Berechnung der Spur der zweiten Potenz des Floquetoperators ordnen wir die periodischen Bahnen der Längen eins und zwei zunächst gemäß der nächstliegenden Bifurkation in Cluster. Bahnen der Länge eins sind hier bereits in Kaskaden verwickelt. Sind sie durch eine Tangentenbifurkation entstanden, so wird der zunächst stabile der beiden neuen Orbits für einen gewissen k–Wert in einer Periodenverdopplung instabil. Man muß dann zwischen den beiden Bifurkationen die Orbits umsortieren. In der

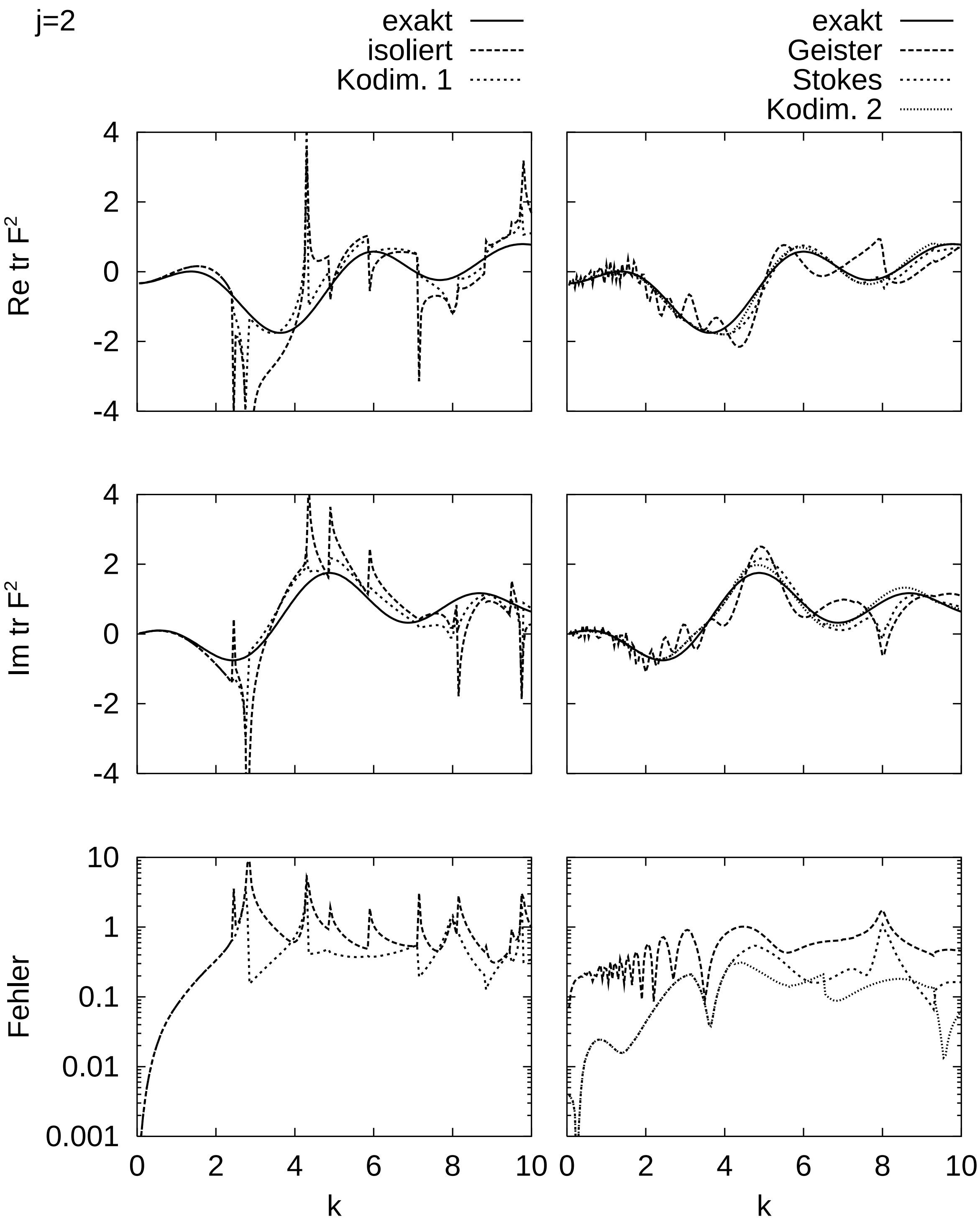


Abbildung 33: Real- und Imaginärteil der Spur tr F^2 und der absolute Fehler $|\operatorname{tr} F^2_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^2_{\mathrm{sk}}|$ als Funktion von k für $j = 2$. Die verschiedenen Näherungen entsprechen denen aus Abbildung 26 für tr F^1.

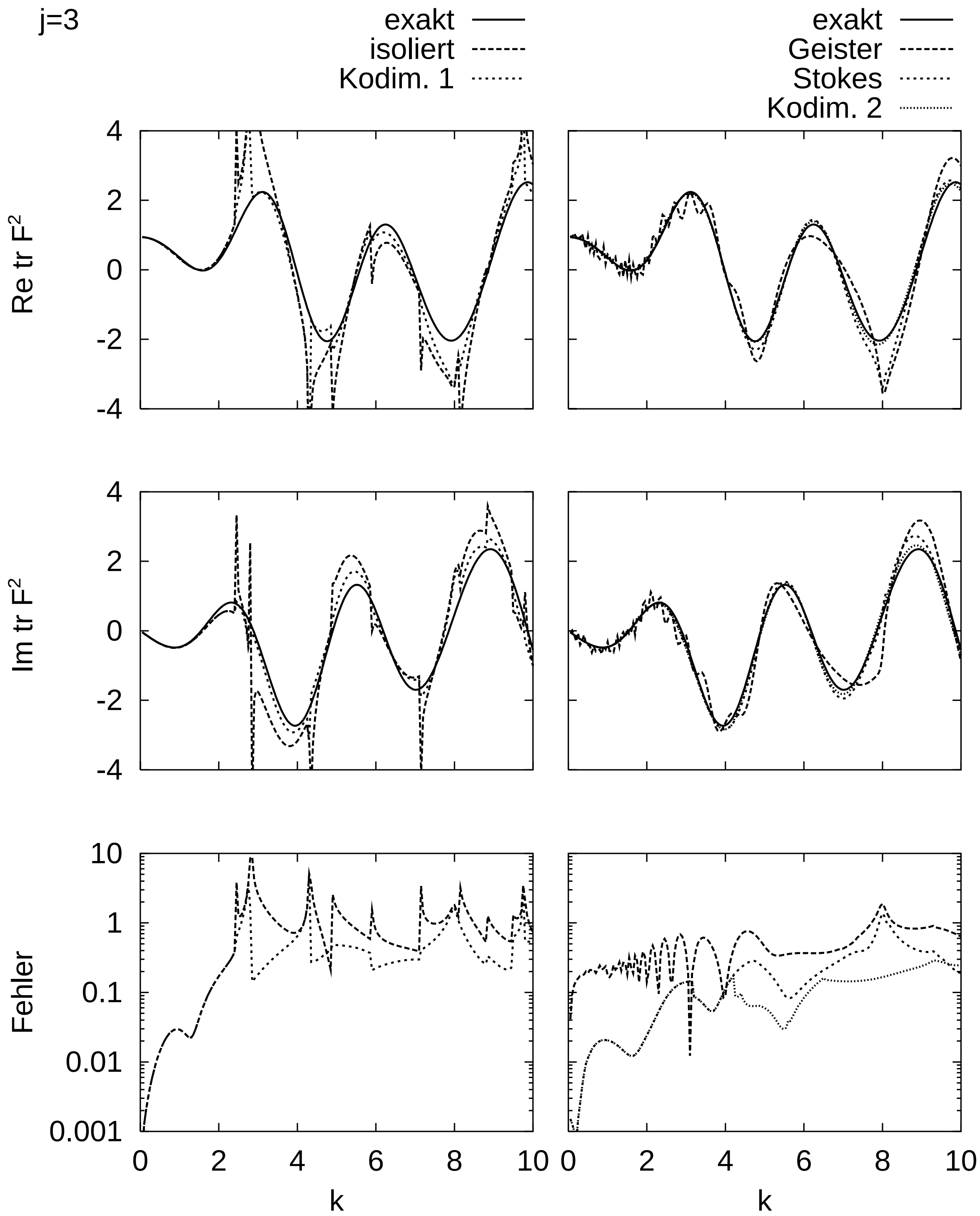


Abbildung 34: Real- und Imaginärteil der Spur tr F^2 und der absolute Fehler $|\operatorname{tr} F^2_{\mathrm{qm}} - \operatorname{tr} F^2_{\mathrm{sk}}|$ als Funktion von k wie in Abbildung 33, aber für $j = 3$

Nähe der Tangentenbifurkation behandeln wir die beiden Periode–eins–Bahnen kollektiv. Ab einem gewissen k–Wert in der Nähe der Periodenverdopplung behandeln wir den instabilen Periode–eins–Orbit isoliert und die beiden bald bifurkierenden Bahnen kollektiv. Den Parameterwert der Umordnung wählen wir so, daß die Diskontinuität der Spur minimiert ist. In allen Fällen reicht diese Vorgehensweise aus. Sollte sie nicht funktionieren, so würde wohl eine kollektive Behandlung aller drei Bahnen zu einer vernünftigen Näherung führen. Eine solche Behandlung der Kodimension zwei, die bei diesen Kaskaden noch umgänglich ist, ist für den bereits in Abschnitt 5.1.5 diskutierten Stokesübergang unverzichtbar. In Abbildung 33 ist die Spur für $j = 2$ gegen k aufgetragen. Die Näherungen entsprechen denen für tr F^1. Wie schon dort sind Näherungen ohne Geister fast nirgends brauchbar. Mit Geistern erkennt man nun die Notwendigkeit, auf Stokesübergänge zu achten. Nicht immer reicht es dabei aus, mit dem Stokesfaktor (4.52) zu multiplizieren. Im Parameterbereich bei $k = 8$ bringt die Näherung der Kodimension zwei für den genannten Stokesübergang tatsächlich einen weiteren substantiellen Gewinn. Auch im Bereich $k = 4$ bis 6 ist das Ergebnis mit Kodimension eins nicht zufriedenstellend. Für zwei Beiträge muß hier die Kodimension erhöht werden. Der eine Fall ist der Stokesübergang des Geistes aus der Bifurkation $[^2/_1]_2$. Er findet bei $k \approx 4.30$ statt. Der dominante Orbit ist der Satellit aus der Periodenverdopplung $[^1/_2]_2$. Er hat die gleiche Länge wie die subdominante Bahn. Daher kommt wieder der Ausdruck aus Abschnitt 4.6.1 zum Zuge. Im anderen Fall, dem Stokesübergang zur Tangentenbifurkation $[^2/_1]_1$ bei $k \approx 3.30$, hat der dominante Orbit $[^1/_0]^{(2)}$ die Länge eins, der subdominante die Länge zwei. Wir benutzen dafür den Ausdruck aus Abschnitt 4.6.2. In beiden Situationen ist die Verwendung dieser Beiträge nur in hinreichender Entfernung zur Bifurkation des jeweiligen dominanten Orbits vernünftig. Im Bereich $k = 4 - 6$ bereitet dies keine Probleme. Im Ergebnis erhält man eine weitere Resultatsverbesserung. Diese Beobachtungen bestätigen sich auch für $j = 3$ (Abbildung 34).

Um die Ergebnisse weiter zu fundieren, betrachten wir wieder die j–Abhängigkeit der Spur und ihres Fehlers für festes k (Abbildung 35). Für $k = 8$ werden die Beiträge von 23 Orbits summiert. Die drei Näherungen unterscheiden sich in der Behandlung der beiden Bahnen aus der Tangentenbifurkation bei 8.12... und dem dominanten Orbit vom zugehörigen Stokesübergang. Ein unakzeptabel großer Fehler tritt bei der gleichförmigen Behandlung der bifurkierenden Bahnen ohne Berücksichtigung ihres Stokesüberganges auf. Die Anwendung des Stokesfaktors drückt den Fehler nur unwesentlich. Erst die kollektive Hinzunahme des dominanten Orbits liefert ein verläßliches Ergebnis.

Gleiches gilt auch für $k = 5$. Die beiden Näherungen unterscheiden wieder in der Behandlung der beiden sich dort ankündigenden Stokesübergänge. Im einen Fall kommt der Stokesfaktor zur Anwendung, im anderen werden die Cluster um die dominanten Orbits erweitert. Die j–Abhängigkeit des Fehlers offenbart für beide k–Werte in der besten Näherung ein algebraisches Abklingen mit dem Exponenten eins.

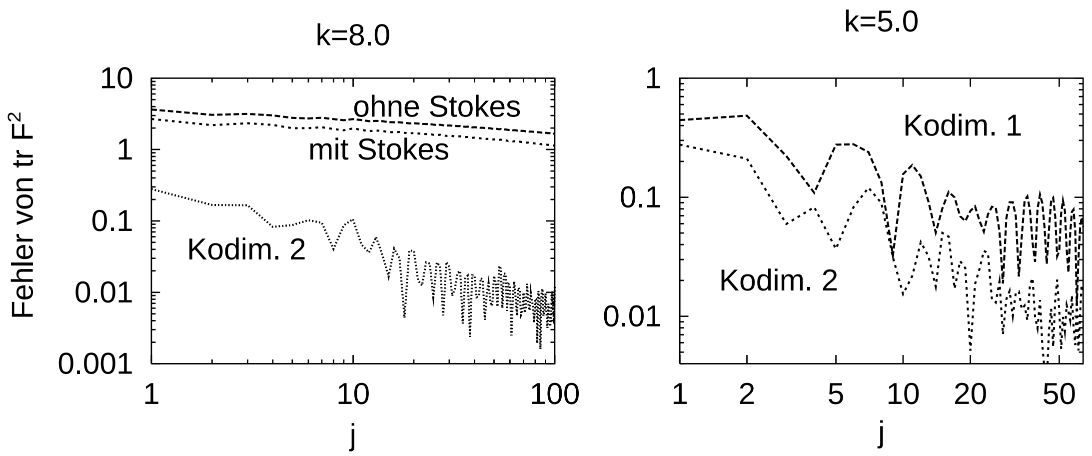


Abbildung 35: Absoluter Fehler $|\,\mathrm{tr}\,F_{\mathrm{qm}}^2 - \mathrm{tr}\,F_{\mathrm{sk}}^2|$ in verschiedenen semiklassischen Näherungen als Funktion von j für $k = 8$ und $k = 5$. Die Näherungen sind im Text beschrieben.

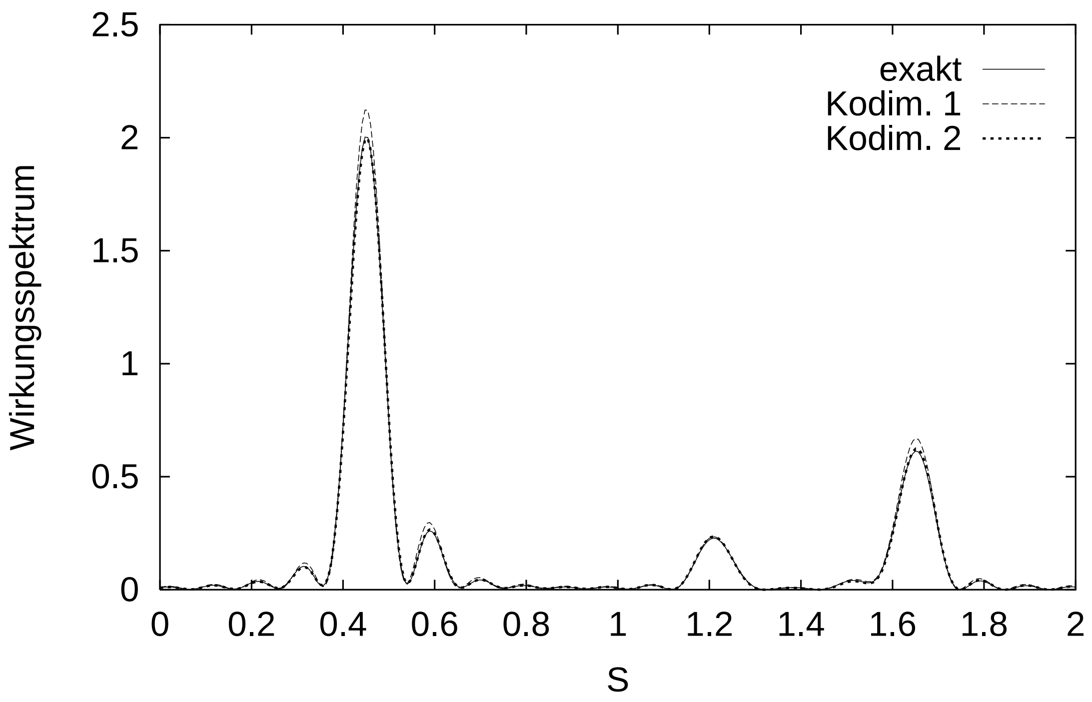


Abbildung 36: Ausschnitt aus dem Wirkungsspektrum für $k = 5$ mit den Näherungen aus Abb. 35

Der Ausschnitt aus dem Wirkungsspektrum für $k = 5$ in Abbildung 36 zeigt bei $S \approx 0.5$ die Peaks des Clusters aus der Bifurkation $[^2/_1]_1$ und dem zugehörigen Stokesübergang; bei $S \approx 1.6$ findet sich die Erhebung zur Bifurkation $[^2/_1]_2$. Bei $S \approx 1.2$ ist der Beitrag des Satelliten aus der Periodenverdopplung $[^1/_2]_1$ zu erkennen.

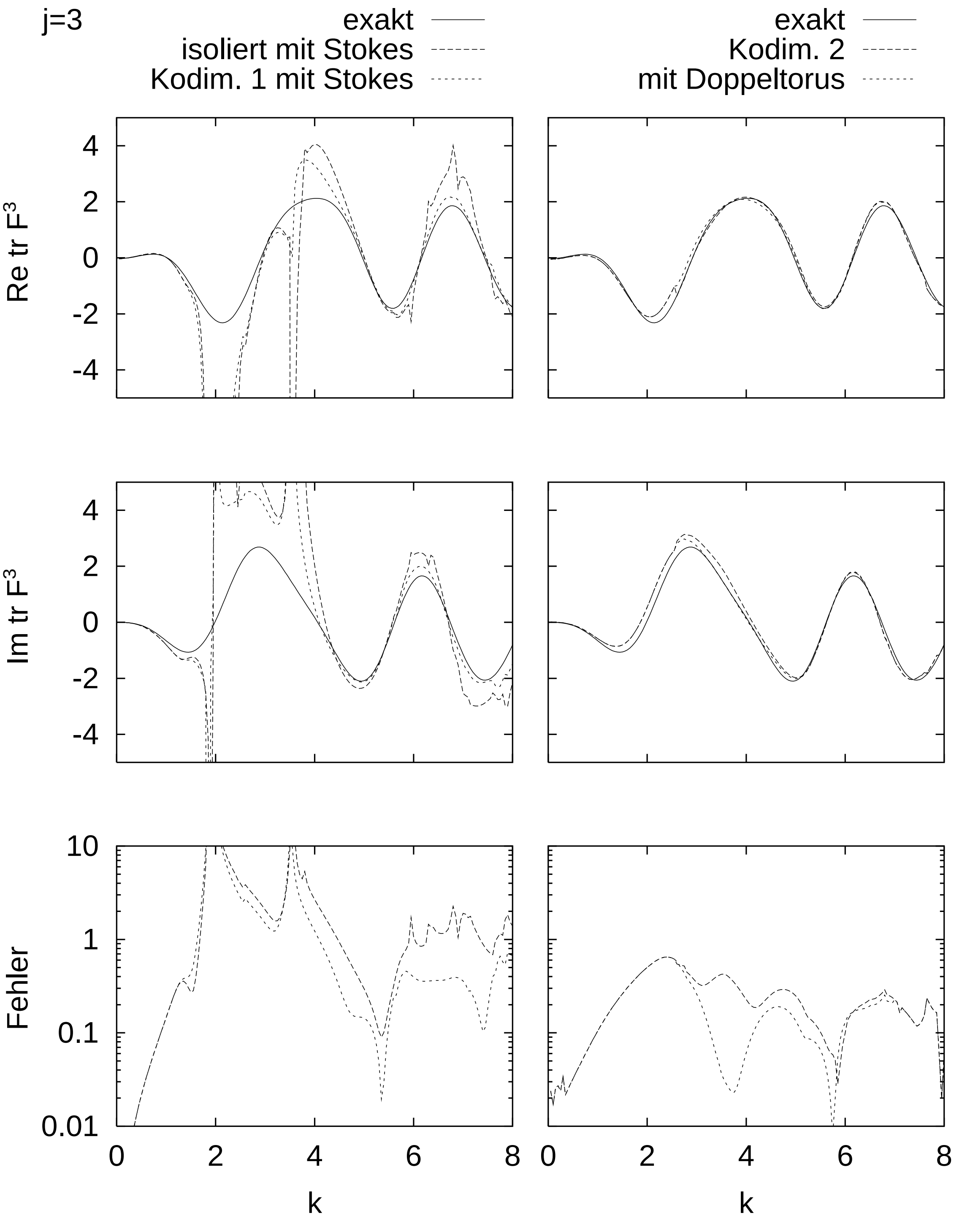


Abbildung 37: Real- und Imaginärteil der Spur $\mathrm{tr}\, F^3$ und der absolute Fehler $|\,\mathrm{tr}\, F^3_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\, F^3_{\mathrm{sk}}|$ als Funktion von k für $j = 3$. Die verschiedenen Näherungen sind im Text erläutert.

5.2.3 Die dritte Potenz

Bei der Berechnung von $\operatorname{tr} F^3$ zeigt sich deutlich die Notwendigkeit einer kollektiven Behandlung von Bahnen, die an einer Abfolge mehrerer Bifurkationen der Kodimension eins beteiligt sind. In Abbildung 37 sind für $j = 3$ Real- und Imaginärteil und der absolute Fehler der Spur in verschiedenen Stufen der Approximation gegen k aufgetragen. Die beiden Näherungen in der linken Spalte beziehen Geisterbahnen ein und behandeln deren Stokesübergänge mittels des Stokesfaktors (4.52). Behandelt man alle Bahnen isoliert, so führt dies zu den bekannt großen Abweichungen in der Nähe von Bifurkationen. Doch selbst die kollektive Behandlung von Bahnen, die nach ihrer Beteiligung an Bifurkationen der Kodimension eins einander zugeordnet werden, führt in weiten Bereichen des Parameterraums zu unbefriedigenden Ergebnissen. Insbesondere die Abfolgen von Tangentenbifurkationen und Periodenverdreifachungen lassen sich so nicht behandeln. Die Näherung der Kodimension zwei in der rechten Spalte vergrößert die Cluster entsprechend. Daraus resultieren die Verbesserungen für $k \approx 1-5$. Damit sind die wesentlichen Defekte der Kodimension–eins–Näherung bereinigt. Doch auch weitergehende Verbesserungen lassen sich noch erreichen. So behandelt die Näherung der Kodimension zwei auch manche Abfolge von Stokesübergang und Tangentenbifurkation kollektiv, wie es schon für $\operatorname{tr} F^2$ notwendig wurde. Dadurch ergeben sich leichte Verbesserungen im Bereich $k \gtrsim 5$. Damit sind alle Näherungen der Kodimension zwei ausgereizt. Es deutet sich bereits an, daß man mit Näherungen noch größerer Kodimension weitere Verbesserungen erzielen kann. Dafür steht beispielsweise die letzte betretene Näherungsstufe. Nur ein Beitrag wurde weiter verbessert: In der Umgebung der Stabilitätsinsel, in der sich die Abfolge von Bifurkationen $[{}^3/{}_1]_2$, $[{}^1/{}_3]_2$ bei $k \approx 1.97$ ereignet, kommt es bei $k = 3.79\ldots$ zu einer weiteren Tangentenbifurkation $[{}^3/{}_1]_4$, in der ein neues Paar von Periode–drei–Bahnen den Weg zum Chaos pflastert. Zusammen mit den Satelliten aus der Tangentenbifurkation $[{}^3/{}_1]_2$ liegen sie auf einer Weise um den zentralen Orbit herumgruppiert, die eine gemeinsame Behandlung der Satelliten als eine Art doppelt gebrochener Torus nahelegt. Ab $k \approx 2.8$ sind die Satelliten vom zentralen Orbit so weit entfernt, daß letzterer mit seinem isolierten Beitrag genommen werden kann. Die Vorgehensweise für den Doppeltorus ist in Abschnitt 4.8 dargelegt. Wie die Näherung „mit Doppeltorus“ zeigt, erhält man mit dieser Form des Beitrags tatsächlich einen substantiellen Gewinn an Genauigkeit, der sich auch für andere j–Werte bestätigt. Dazu verweisen wir auf Abbildung 38. Sowohl im Fehlerverhalten mit veränderlichem j als auch im zugehörigen Peak im Wirkungsspektrum zeigt sich die Überlegenheit der Näherung mit dem Doppeltorusbeitrag.

Eine weitere Verbesserung für die Spur wäre zu erwarten, wenn man für $k \lesssim 2.8$ die vier Satelliten mit dem zentralen Orbit gemeinsam behandelt. In der Normalform für die Erzeugende muß man dazu um drei Ordnungen über die Birkhoffsche Form hinausgehen. Dies entspräche bereits einer Näherung der Kodimension vier. (Bei Kodimension drei tritt gegenüber Kodimension zwei nur ein weiterer, zwangsläufig reeller

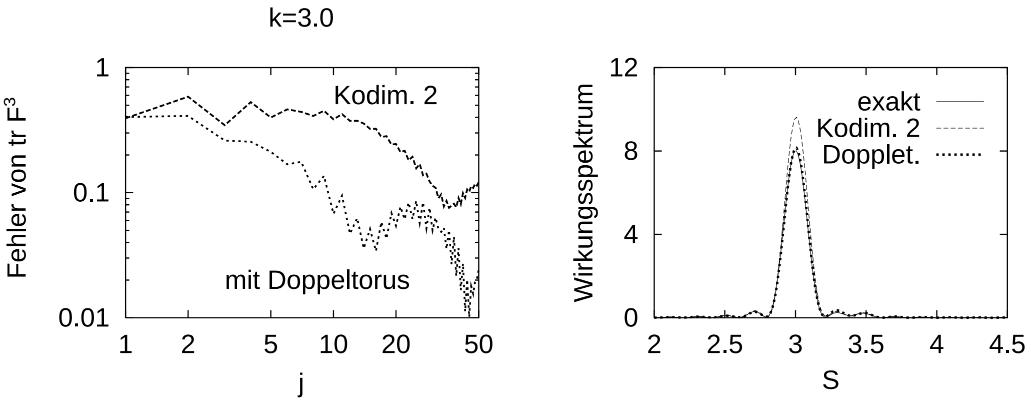


Abbildung 38: Absoluter Fehler $|\,\mathrm{tr}\,F^3_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\,F^3_{\mathrm{sk}}|$ als Funktion von j und ein Ausschnitt aus dem Wirkungsspektrum für $k = 3$. Die beiden Näherungen sind im Text beschrieben. Das Wirkungsspektrum ist hier aus numerischen Konvergenzgründen mit $j_{\max} = 32$ berechnet worden.

Satellit auf.) Auch andere Stabilitätsinseln ließen sich sicher genauer beschreiben. Der mit einer konsistenten Erhöhung der Kodimension um einen oder zwei Schritte verbundene Mehraufwand läßt es aber vertretbar erscheinen, im Rahmen dieser Arbeit davon abzusehen.

5.3 Die Determinante des Floquetoperators

Bei der Entschlüsselung des Spektrums aus den Spuren erspart einem die Selbstinversitätsbeziehung (4.4) die Hälfte der Arbeit. Zu ihrer Verwendung benötigt man die Determinante $a_N = \det F$ des Floquetoperators. Bei der analogen Relation für autonome Systeme [89–91] denkt man sich den zwischen langen und kurzen Zeiten vermittelnden Term meist als exakt vorgegeben. Bei unserer Kreiselvariante läßt sich die Determinante semiklassisch bestimmen und dabei sogar exakt gewinnen. Von Nutzen ist hier die wohlbekannte Tatsache, daß die Determinante eines Produkts von Operatoren durch das Produkt der einzelnen Determinanten zugänglich ist. Die linearen und nichtlinearen Torsionsoperatoren des Kreisels beschreiben jedoch jeder für sich ein integrables System, für welches eine EBK–Quantisierung durchgeführt werden kann. Dabei kommt es wiederum jeweils nur auf das Spektrum der Operatoren J_l, $l = x, y, z$ an, für die die Quantisierung aber exakt ist. Die exakte Quantisierung der Teilschritte gelingt auch mittels periodischer Bahnen. Dies ist Gegenstand der Abschnitte 5.4.1 und 5.4.2. Das Resultat läßt sich sogar explizit angeben. So gilt für den Drehoperator (2.10)

$$\det R_l(\beta) = \exp\left[-i\beta \sum_{m=-j}^{j} m\right] = 1 \tag{5.4}$$

und für den Torsionsoperator (2.11)

$$\det T_l(k) = \exp\left[-i\frac{k}{2j+1}\sum_{m=-j}^{j} m^2\right] = \exp\left[-ik\frac{j(j+1)}{3}\right] . \tag{5.5}$$

Damit erhält man für die in Abschnitt 2.1.3 gewählte Kombination von Drehungen und Torsionen

$$\det F = \exp\left[-i(k_1+k_2)\frac{j(j+1)}{3}\right] . \tag{5.6}$$

5.4 Spektren

Wir kommen nun zur Berechnung der Quasienergieniveaus aus den semiklassischen Spuren. Bei der reinen linearen Drehung und der reinen Torsion erhält man auf analytischem Wege für beliebiges j das exakte quantenmechanische Spektrum zurück. Im allgemeinen Fall $k \neq 0$ werden die Niveaus durch Ziehen der Wurzeln des charakteristischen Polynoms bestimmt. In diesem Abschnitt stellen wir die Ergebnisse für $j = 1, 2, 3$ vor. Die Spuren und Spektren zu halbzahligem j werden in Abschnitt 5.5 besprochen.

Um die Genauigkeit der verschiedenen Näherungen zu quantifizieren, ziehen wir die Standardabweichung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\pi/N}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_k^{(\mathrm{sk})} - \varphi_k^{(\mathrm{qm})}\right)^2} \tag{5.7}$$

mit $N = 2j+1$ heran. Durch den Vorfaktor werden die Abweichungen der Quasienergien auf ihren mittleren Abstand $2\pi/N$ bezogen.

Die semiklassischen Eigenwerte $\lambda_k \equiv r_k \exp[-i\varphi_k]$ des Floquetoperators liegen nicht immer auf dem Einheitskreis, sie sind also nicht immer unimodular (d. h. von Betrag eins). Dann mißt der Radialfehler

$$\Delta r = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(r_k^{(\mathrm{sk})} - 1\right)^2} \tag{5.8}$$

die Verletzung der Unimodularität. Selbst ein selbstinverses Polynom kann phasenentartete Eigenwertpaare λ_k, $1/\lambda_k^*$ besitzen. Erst wenn darüber hinausgehende Bedingungen an die Spuren erfüllt sind, sind alle Eigenwerte unimodular [92].

5.4.1 Die reine Drehung

Wir betrachten nun die reine lineare Drehung. In diesem Fall sind die semiklassisch aus den isolierten Beiträgen der beiden Fixpunkte bei $\pm\tilde{\mathbf{X}}$ berechneten Spuren $\mathrm{tr}\, F^n$ exakt.

Das Ergebnis ist unabhängig von der Lage der Drehachse. Wir wählen hier die y–Achse und verwenden den Floquetoperator

$$F = \exp\left[-i\beta J_y\right] \ . \tag{5.9}$$

Man kann die quantenmechanischen Spuren in geschlossener Form angeben,

$$\mathrm{tr}\, F^n = \sum_{m=-j}^{j} \exp\left[-in\beta m\right] = \frac{\sin(Jn\beta)}{\sin(n\beta/2)} \tag{5.10}$$

mit $J = j + \frac{1}{2}$. Für eine Drehung um $2\pi + \beta$ ergibt sich übrigens für halbzahliges j ein Vorzeichenwechsel der Spuren zu ungeraden Potenzen, in Einklang mit der bekannten Tatsache, daß erst eine Drehung um 4π die Identität liefert.

Wir unterscheiden die beiden Fixpunkte bei $\mathbf{X} = (0, \pm 1, 0)$ mittels des Vorzeichens $\sigma \equiv \mathrm{sign}\, Y = \pm 1$. Es gibt keine weiteren periodischen Bahnen für beliebige Länge n. Die Wirkung der Fixpunkte ist

$$S_\sigma = -\sigma\beta \ . \tag{5.11}$$

Der Stabilitätswinkel ist $\sigma\beta$ und der Stabilitätsfaktor

$$\mathrm{tr}\, M_\sigma^{(n)} = 2\cos(n\beta) \ . \tag{5.12}$$

Der Morseindex $\hat{\mu}^{(n)}$ für die n–te Wiederkehr richtet sich nach den Nullstellen von $\tilde{M}_{11} = \cos(\beta t/T)$ im Intervall $t = 0 \to nT$ [vgl. (3.28) mit $k = 0$]. Wir schreiben

$$n\beta = \tilde{\beta} + \pi\tilde{m} \qquad \text{mit} \quad \tilde{\beta} \in (-\pi/2, \pi/2] \ . \tag{5.13}$$

Dann gibt es $|\tilde{m}|$ Kaustiken, und jede trägt mit dem Vorzeichenwechsel $-\sigma\, \mathrm{sign}\, \beta$ von M_{11}/M_{21} zu $\hat{\mu}_\sigma^{(n)}$ bei. Wir erhalten

$$\hat{\mu}_\sigma^{(n)} = -\sigma\tilde{m} \ . \tag{5.14}$$

Der Maslovindex ergibt sich aus (3.49) zu

$$\nu_\sigma^{(n)} \ = \ -\sigma\tilde{m} - \sigma\frac{1}{2}\, \mathrm{sign}\sin(n\beta)[1 + \mathrm{sign}\cos(n\beta)] \ . \tag{5.15}$$

Schreiben wir

$$n\beta = \beta' + 2\pi m' \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} \beta' \in [0, 2\pi) & \text{für} \quad \beta > 0 \\ \beta' \in (-2\pi, 0] & \text{für} \quad \beta < 0 \end{cases} , \tag{5.16}$$

so ist

$$\tilde{m} = 2m' + \operatorname{sign}\beta - \frac{1}{2}\operatorname{sign}\sin(n\beta)[1 + \operatorname{sign}\cos(n\beta)] \tag{5.17}$$

und weiter

$$\nu_\sigma^{(n)} = -\sigma(2m' + \operatorname{sign}\beta) . \tag{5.18}$$

Mit diesen Größen ist semiklassisch

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} F^n &= \sum_{\sigma=\pm 1} |2 - \operatorname{tr} M_\sigma^{(n)}|^{-1/2} \exp\left[iJnS_\sigma - i\frac{\pi}{2}\nu_\sigma^{(n)}\right] \\ &= \frac{\sin(Jn\beta)}{|\sin(n\beta/2)|}(-1)^{m'} \operatorname{sign}\beta . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Wegen $\operatorname{sign}\sin(n\beta/2) = (-1)^{m'}\operatorname{sign}\beta$ erhalten wir tatsächlich das exakte Resultat (5.10) zurück.

5.4.2 Die reine Torsion

Mit der reinen Torsion wollen wir einen weiteren interessanten Sonderfall unserer Kreiselvariante betrachten. Als Floquetoperator wählen wir (2.11)

$$F = T_z(k) = \exp\left[-i\frac{k}{2j+1}J_z^2\right] . \tag{5.20}$$

Er beschreibt wie die reine Drehung ein integrables System. Die Tori liegen auf den Kreisen konstanter Höhe Z. Anders als bei der reinen Drehung ist die Torusfrequenz nun aber ortsabhängig,

$$\omega(Z) = kZ . \tag{5.21}$$

Da der Aufwand sich in Grenzen hält, wollen wir die reine Torsion dazu nutzen, um den gesamten Weg von der quantenmechanischen zur semiklassischen Spur im Zusammenhang darzustellen. Erneut wird das semiklassische Resultat exakt sein.

Wir beginnen mit einem exakten Ausdruck und verwenden sogleich die Poissonsche Summationsformel (4.12),

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} T_z(k) &= \sum_{m=-j}^{j} \exp\left[-i\frac{k}{2j+1}m^2\right] \\
&= J \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} dZ \, \exp\left[iJ\left(2\pi n Z - \frac{k}{2}Z^2\right)\right] \exp\left[i\left(J-\frac{1}{2}\right)2\pi n\right] . \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

Die letzte Exponentialfunktion alterniert für halbzahliges j und berücksichtigt damit den Wechsel von der halbzahligen kleinen Quantenzahl m zum ganzzahligen n. Hier bietet sich bereits eine Interpretation als Summe von Beiträgen periodischer Bahnen auf rationalen Tori an: Jedes Integral besitzt genau einen stationären Punkt bei

$$Z = Z_n \equiv \frac{2\pi n}{k} , \qquad (5.23)$$

also gerade dort, wo die Tori mit Windungszahl n liegen. Auch Geistertori mit $|Z_n| > 1$ treten auf. Die Wirkung der Tori ist

$$S_n = \frac{2\pi^2 n^2}{k} . \qquad (5.24)$$

Doch wo bleiben in diesem Bild die beiden Fixpunkte auf der z–Achse? Ihre Beiträge sind in den endlichen Integrationsgrenzen versteckt. Um sie explizit sichtbar zu machen, beginnen wir mit der semiklassischen Betrachtungsweise und benutzen die Näherung (4.104). Da beide Integrationsgrenzen endlich sind, schreiben wir (formal) $\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{\infty} - \int_{1}^{\infty}$ und erhalten für jeden Torus den Beitrag

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{(n)} \equiv{}& \sqrt{-\frac{2\pi i J}{k}} \exp\left[iJ(S_n + 2\pi n)\right](-1)^n \left[\Theta(Z_n+1) - \Theta(Z_n-1)\right] \qquad (5.25) \\
&+ \frac{i}{k}\exp\left[iJ(S_n+2\pi n)\right](-1)^n \left\{ \left(\int_{Z_n-1}^{\infty\,\mathrm{sign}(Z_n-1)} - \int_{Z_n+1}^{\infty\,\mathrm{sign}(Z_n+1)} \right) \frac{dX}{X^2} e^{-iJ\frac{k}{2}X^2} \right\} .
\end{aligned}$$

Der erste Term ist gerade der Berry–Tabor–Term (4.119). Er trägt nur bei, falls der Torus kein Geist ist. Es folgen Interferenzterme wie in (4.101). Die verbleibenden Randterme ergeben mithilfe der Identität

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x - \pi n} \qquad (5.26)$$

gerade die beiden Beiträge

$$\mathcal{J}^{(\pm)} = \frac{i}{2\sin\frac{k}{2}} \exp\left[-iJ\frac{k}{2}\right] \tag{5.27}$$

der Fixpunkte an den Polen. Tatsächlich sind diese Bahnen durch

$$S^{(\pm)} = -\frac{k}{2}\,, \tag{5.28}$$

$$\mathrm{tr}\, M^{(\pm)} = 2\cos k\,, \tag{5.29}$$

$$\nu^{(\pm)} \bmod 4 = -\,\mathrm{sign}\sin\frac{k}{2} \tag{5.30}$$

charakterisiert, die Beiträge (5.27) stellen sich also als solche isolierter periodischer Bahnen (4.48) dar.

Wie man sich bei der quadratischen Form des Exponenten in (5.22) denken kann, ist die semiklassische Näherung (4.104) für das betrachtete Integral sogar exakt. Der Weg von (5.22) zu (4.104) führt über eine partielle Integration, die

$$\int \exp\left[i\frac{a}{2}X^2\right] dX = \frac{1}{iaX}\exp\left[i\frac{a}{2}X^2\right] + \frac{1}{ia}\int \frac{dX}{X^2}\exp\left[i\frac{a}{2}X^2\right] \tag{5.31}$$

liefert. Das Integral rechts divergiert jedoch, falls die Singularität des Integranden bei $X = 0$ in den Integrationsbereich fällt. Mittels dreier Fallunterscheidungen $a < b < 0$, $a < 0 < b$, $0 < a < b$ überlegt man sich leicht die Identitäten

$$\int_a^b = [\Theta(b) - \Theta(a)]\int_{-\infty}^{\infty} + \int_a^{\infty\,\mathrm{sign}\,a} - \int_b^{\infty\,\mathrm{sign}\,b} \tag{5.32}$$

$$= [\Theta(b) - \Theta(a)]\int_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{sign}\,a\int_{|a|}^{\infty} - \mathrm{sign}\,b\int_{|b|}^{\infty} \tag{5.33}$$

(letztere für symmetrische Integranden), mit denen die Singularität umschifft werden kann. Das zweite und das dritte Integral rechts liefern nach der partiellen Integration die Rand- und Interferenzterme, während das erste Integral direkt auf den Berry–Tabor–Term führt.

5.4.3 Die drei Quasienergieniveaus für Quantenzahl $j = 1$

Zur Bestimmung der drei Quasienergien für $j = 1$ benötigen wir die Spur $\mathrm{tr}\, F$, mit der wir uns in Abschnitt 5.2.1 ausführlich beschäftigt haben, und die Determinante $\det F$ (Gleichung 5.6). In Abbildung 39 sind semiklassische Quasienergien als Funktion von k aufgetragen. Sie werden jeweils mit dem quantenmechanisch exakten Resultat verglichen. Insbesondere in der Nähe der Tangentenbifurkationen $[^1/_1]_{1,2}$ bei $k = 2.45\ldots$

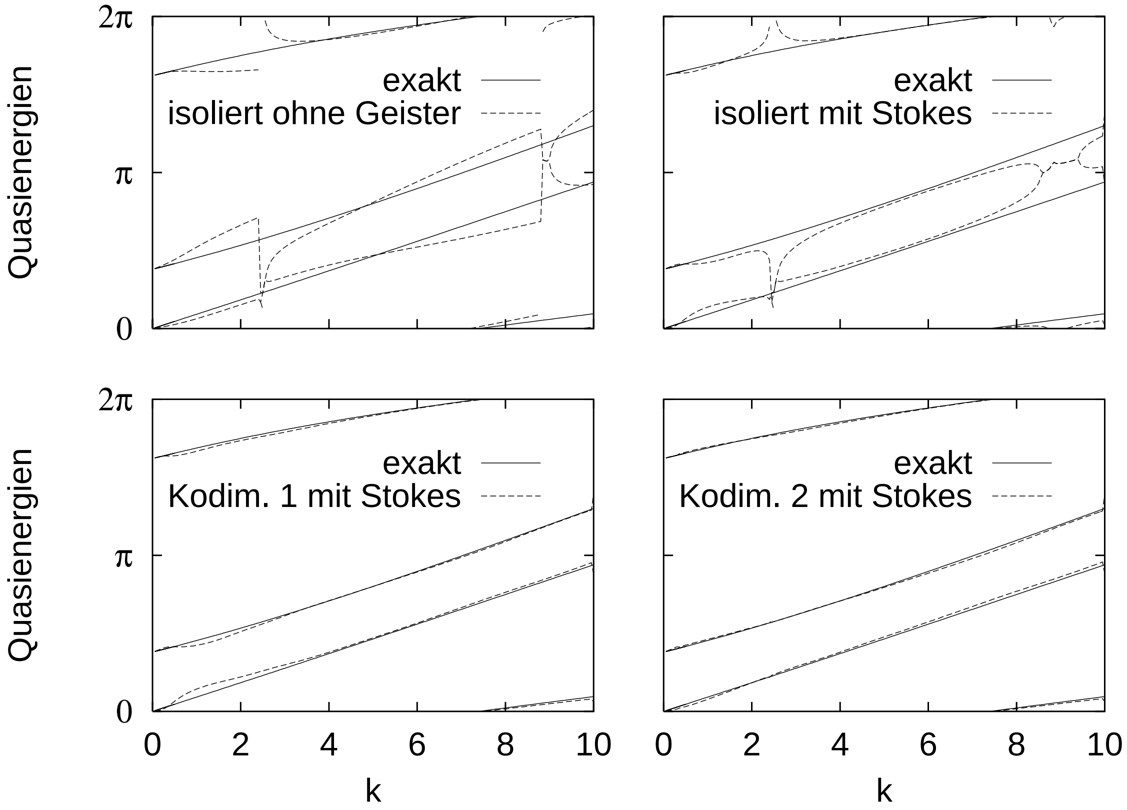


Abbildung 39: Vergleich der drei semiklassisch approximierten mit den drei exakten Quasienergien für $j = 1$ als Funktion von k. Die kollektiven Näherungen ergeben eine schöne Übereinstimmung mit den exakten Niveaus, die bei der Verwendung von isolierten Näherungen nur weit weg von Bifurkationen erreicht wird.

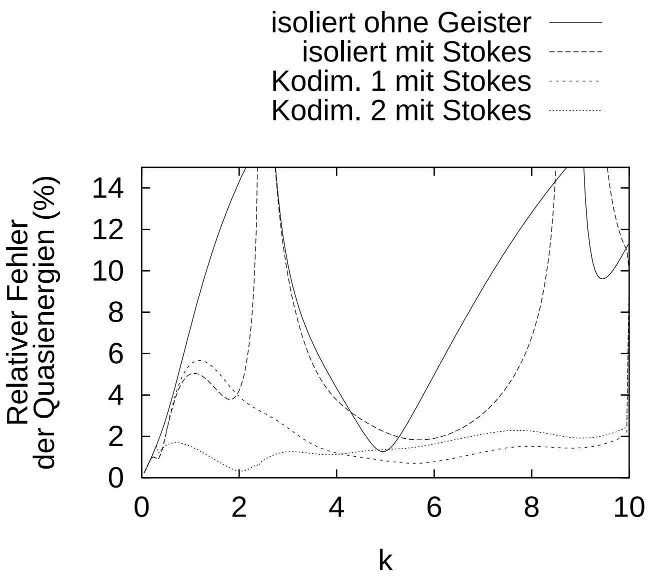


Abbildung 40: Mittlerer relativer Fehler der Quasienergien aus den Näherungen von Abbildung 39

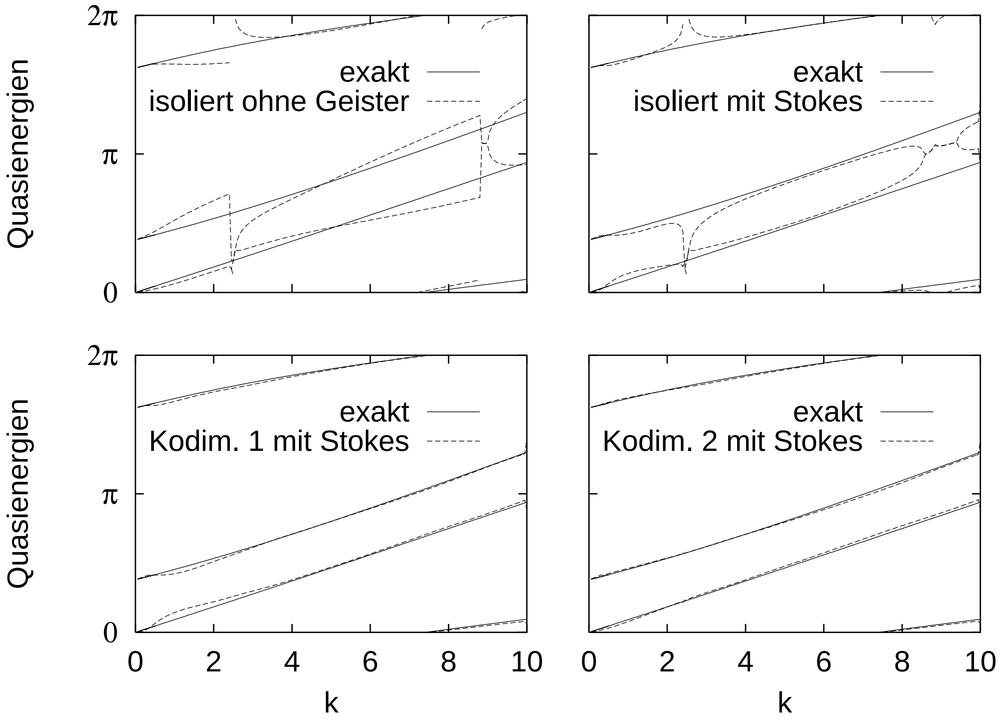


Abbildung 41: Vergleich der semiklassisch approximierten und exakten Quasienergien für $j = 1$ als Funktion von k. Die Näherungen lösen sich auf die im Text beschriebene Weise vom Gebrauch der Selbstinversitätsbeziehung (4.4) bzw. der exakten Determinante (5.6).

und $k = 8.81\ldots$ liefern die beiden Näherungen auf der Basis isolierter Beiträge zu $\operatorname{tr} F$ unbefriedigende Ergebnisse. Die Näherung, welche Geister und deren Stokesübergänge berücksichtigt, ist dabei links der Bifurkationen der Näherung ohne jede Geisterbeiträge leicht überlegen. Quantitativ schlägt sich dies in einem geringeren mittleren relativen Fehler nach Gleichung (5.7) nieder. Er ist in Abbildung 40 dargestellt. In Abbildung 39 fällt bei den isolierten Näherungen die Entartung zweier Niveaus bei $k \approx 9$ ins Auge. Dort verletzen die semiklassischen Spuren die über die Selbstinversität hinausgehenden Unitaritätsbedingungen [92]: Zwei Eigenwerte liegen nicht mehr auf dem Einheitskreis, sind jedoch durch eine Spiegelung am Einheitskreis miteinander verknüpft und daher in ihrer Phase entartet.

Kommen wir nun zu den kollektiven Näherungen. Die Abbildungen für die Lage der Niveaus und den Fehler zeigen, daß man mit kollektiven Beiträgen der Kodimension eins bereits eine sehr schöne Übereinstimmung mit dem exakten Resultat erreicht. Die Phasenentartung bei $k \approx 9$ ist verschwunden. Der Fehler der Quasienergien beträgt im gesamten k–Bereich nur einige Prozent ihres mittleren Abstands. Behandelt man den Stokesübergang des an der ersten Tangentenbifurkation beteiligten Geistes mit einem vergrößerten Cluster der Kodimension zwei, so verbessert sich das Ergebnis im Bereich $k = 0.5$–3, auf den diese Bemühung abzielt, sogar noch um einige Prozent. So drückt man den Fehler im gesamten Parameterbereich auf weniger als zwei Prozent.

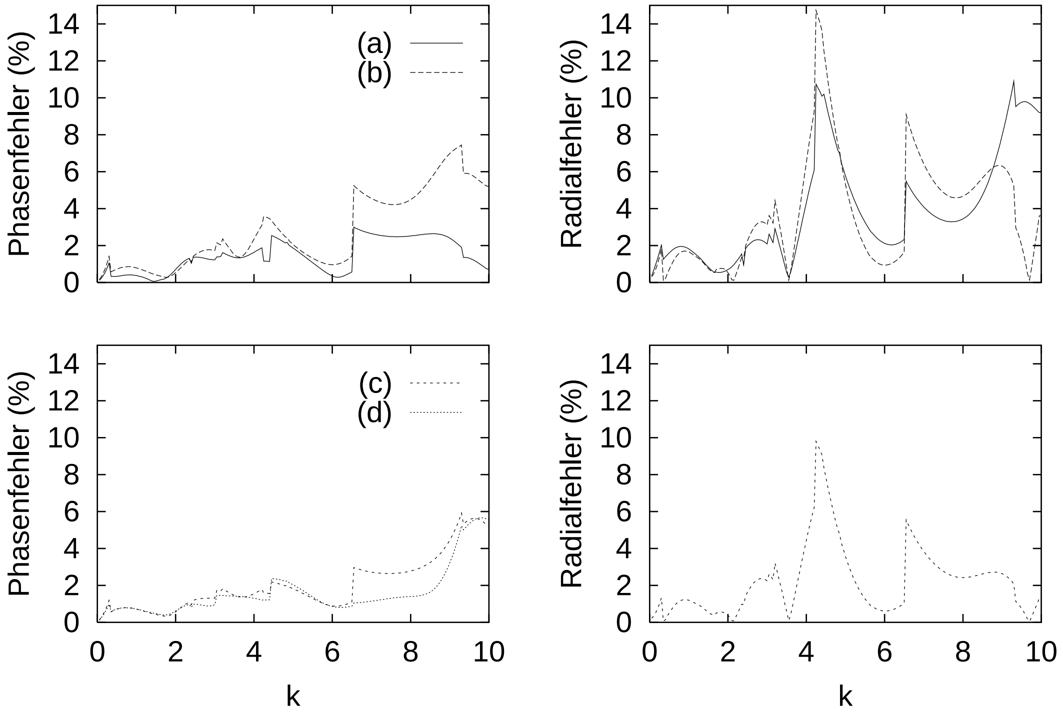


Abbildung 42: Mittlerer relativer Phasen- und Radialfehler der Quasienergien aus den Näherungen von Abbildung 41

Wir wollen nun noch kurz einige andere Entschlüsselungsstrategien testen und verzichten dabei Stück für Stück auf die Verwendung der Selbstinversitätsrelation (4.4) und des exakten Ausdrucks (5.6) für die Determinante. Dabei benutzen wir für die Spuren tr F, tr F^2 und tr F^3 jeweils die besten semiklassischen Näherungen. Die Quasienergien sind in Abbildung 41 aufgetragen; ihr mittlerer relativer Phasenfehler (5.7) findet sich in Abbildung 42. Dort ist auch der Radialfehler (5.8) der Eigenwerte dargestellt, der sich für nicht selbstinverse Polynome zwangsläufig ergibt. Im ersten Schritt (a) ziehen wir tr F^2 heran, um den zweiten Koeffizienten

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\, F)^2 - \mathrm{tr}\, F^2\right] \equiv \tilde{a}_2 \tag{5.34}$$

direkt zu bestimmen, benutzen aber weiterhin für $a_3 = \det F$ das exakte Resultat. Im zweiten Schritt benutzen wir die Selbstinversität, um uns vom Gebrauch der exakten Determinante zu lösen, und verwenden stattdessen nach den Newtonschen Formeln (4.3)

$$a_3 = \frac{a_1}{a_2^*} = \frac{a_2}{a_1^*} \, . \tag{5.35}$$

Semiklassisch ist der Betrag des Koeffizienten von eins verschieden. Die Unitarität fordert jedoch $|\det F| = |a_3| = 1$. Die semiklassische Abweichung des Absolutbetrags

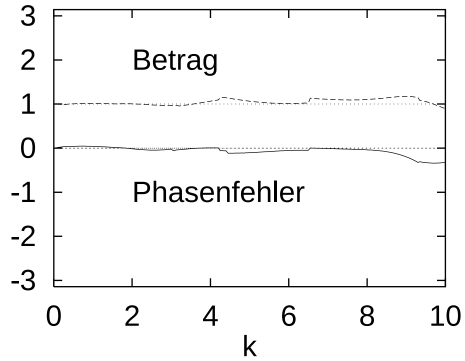


Abbildung 43: Für den semiklassisch bestimmten Koeffizienten $a_3 = a_1/a_2^*$ ist der Betrag und die Phasenabweichung bezüglich det F dargestellt.

und der Phase der Kombination a_1/a_2^* bezüglich det F ist in Abbildung (43) dargestellt. Mit diesem Koeffizienten und dem semiklassischen $\tilde{a}_2$ erhält man Näherung (b). Für die Näherung (c) wird a_3 normiert. Das Ergebnis ist dann übrigens für die beiden Möglichkeiten aus Gleichung (5.35) identisch. In der Näherung (d) ist der normierte Koeffizient a_3 wieder benutzt worden, um selbstinvers a_2 zu bestimmen. Der benutzte Koeffizient läßt sich dann auch als

$$a_2 = |a_1| \exp\left[i \arg(\tilde{a}_2)\right] \tag{5.36}$$

schreiben, trägt also die Phase der Kombination (5.34), aber den Betrag des Koeffizienten a_1. So hat man unter Verzicht auf die Benutzung der exakten Determinante ein selbstinverses Polynom gewonnen. Da es zu keiner Phasenentartung kommt, verschwindet hier auch der Radialfehler.

Die Daten zeigen, daß man für $j = 1$ tatsächlich um den Gebrauch der exakten Determinante herumkommt, wenn auch um den Preis einer leichten Resultatsverschlechterung.

5.4.4 Die fünf Quasienergieniveaus für Quantenzahl $j = 2$

Für $j = 2$ beschreibt F fünf Niveaus mit der entsprechenden Zahl an Quasienergien. Wieder lassen sich verschiedene semiklassische Näherungen für $\mathrm{tr}\, F$ und $\mathrm{tr}\, F^2$ zusammen mit der exakten Determinante (5.6) zu ihrer Bestimmung heranziehen. In Abbildung 44 ist das Ergebnis für eine isolierte und zwei kollektive Näherungen dargestellt. In allen Näherungen werden Geister und ihre Stokesübergänge berücksichtigt. In der isolierten Näherung werden die Quasienergieniveaus zwar tendenziell richtig erfaßt, die Abweichungen in der Nähe von Bifurkationen sind jedoch recht groß. Sehr häufig kommt es auch zu Phasenentartungen aufgrund einer Verletzung der zusätzlichen Unitaritätsbedingungen. Sie treten selbst dort auf, wo die exakten Quasienergieniveaus weit auseinanderliegen. Mittels kollektiver Beiträge der Kodimension eins kann man

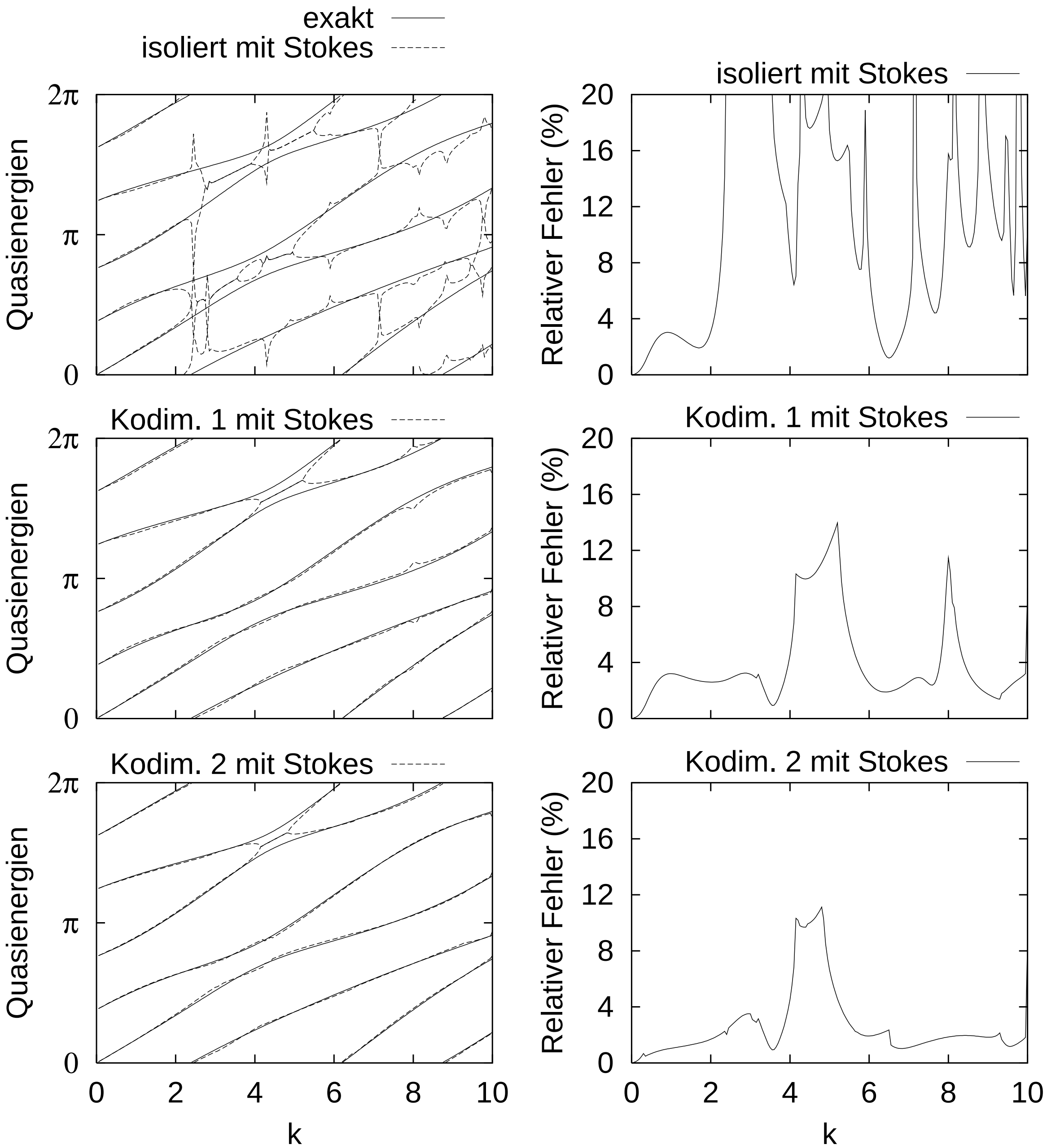


Abbildung 44: Vergleich der semiklassisch approximierten und exakten Spektren für $j = 2$ als Funktion von k. Links sind die Quasienergien aufgetragen, rechts ihr mittlerer relativer Fehler.

sich abgesehen von einer Ausnahme im Intervall bei $k \approx 4-6$ aller Entartungen und erratischen Abweichungen entledigen. Dort sowie bei $k=8$ ist der mittlere Fehler um einige Prozent erhöht. Ansonsten liegt er bei weniger als vier Prozent.

Der Qualitätsverlust bei $k = 8$ ist auf die enge Abfolge der Tangentenbifurkation $[^2/_1]_4$ bei $k = 8.12\ldots$ und des Stokesüberganges des zugehörigen Geistes bei $k = 7.98\ldots$ zurückzuführen, mit der wir uns bereits in den Abschnitten 5.1.5 und 5.2.2 auseinandergesetzt haben. Wie beim Wirkungsspektrum und der Spur verbessert sich das Ergebnis deutlich, wenn man gemäß Abschnitt 4.6.1 auf den Beitrag der Kodimension zwei zurückgreift, der den dominanten Orbit mit einschließt. Auch für $k < 2$ gewinnt man an Genauigkeit, was dort aus der Verbesserung von $\operatorname{tr} F$ herrührt. In einem großen Parameterbereich erhält man so einen relativen Fehler von knapp zwei Prozent. Selbst mit der Näherung der Kodimension zwei läßt sich jedoch die Entartung der Quasienergieniveaus im Intervall $k \approx 4-6$ nicht beheben. Möglicherweise liegt dies daran, daß auch die exakten Quasienergieniveaus dort eng beieinander liegen. Es kann aber auch vermutet werden, daß sich bei einer Erhöhung der Kodimension das Resultat weiter verbessern ließe.

5.4.5 Die sieben Quasienergieniveaus für Quantenzahl $j = 3$

Für die Gewinnung des Spektrums für $j = 3$ muß neben den ersten beiden Spuren $\operatorname{tr} F$ und $\operatorname{tr} F^2$ und der Determinante auch die dritte Spur $\operatorname{tr} F^3$ herangezogen werden. Bei dieser Spur waren für enge Abfolgen von Tangentenbifurkationen und Periodenverdreifachungen Cluster der Kodimension zwei angesagt. Für den Bereich ab $k \approx 2.8$ lohnte sich zudem die Anordnung von vier Orbits als doppelt gebrochener Torus.

Während sich so die Spuren immer genauer approximieren lassen, schlägt sich gerade die letzte Verbesserung nicht in einem völlig befriedigenden Maße im Spektrum nieder. Nach Abbildung 45 ist die Näherung mit Kodimension zwei jener mit Kodimension eins überlegen, und diese wiederum der isolierten Approximation. Die übrigbleibenden Phasenentartungen lassen sich jedoch auch mit dem Doppeltorusbeitrag nicht gänzlich aus der Welt schaffen. Fürs Auge verhält sich das Spektrum immerhin ein wenig regulärer als ohne diesen Beitrag. Wie schon bei der Diskussion der dritten Spur erwähnt, liegt insbesondere für den Bereich $k < 2.8$ Hoffnung in einer weiteren Erhöhung der Kodimension. Die Schuld an der Phasenentartung läßt sich aber nicht gänzlich auf die dritte Spur abwälzen. Benutzt man anstatt der genäherten die exakte, nähert man also nur die ersten beiden Spuren semiklassisch, so bleibt die Phasenentartung im k–Bereich zwischen eins und drei bestehen. Nur die weitere Entartung in der Folge läßt sich so fast vollständig beheben. Dies zeigt die Empfindlichkeit der Näherung: Schließlich trat etwa bei $j = 2$ im hier verbleibenden Entartungsbereich keine Entartung auf. Die beiden ersten Spuren waren dort sogar für einen Fehler von etwa zwei Prozent gut. Insgesamt scheint die semiklassische Entschlüsselungsstrategie dann am meisten gefährdet zu sein, wenn sich exakte Niveaus als Funktion des Kontrollpa-

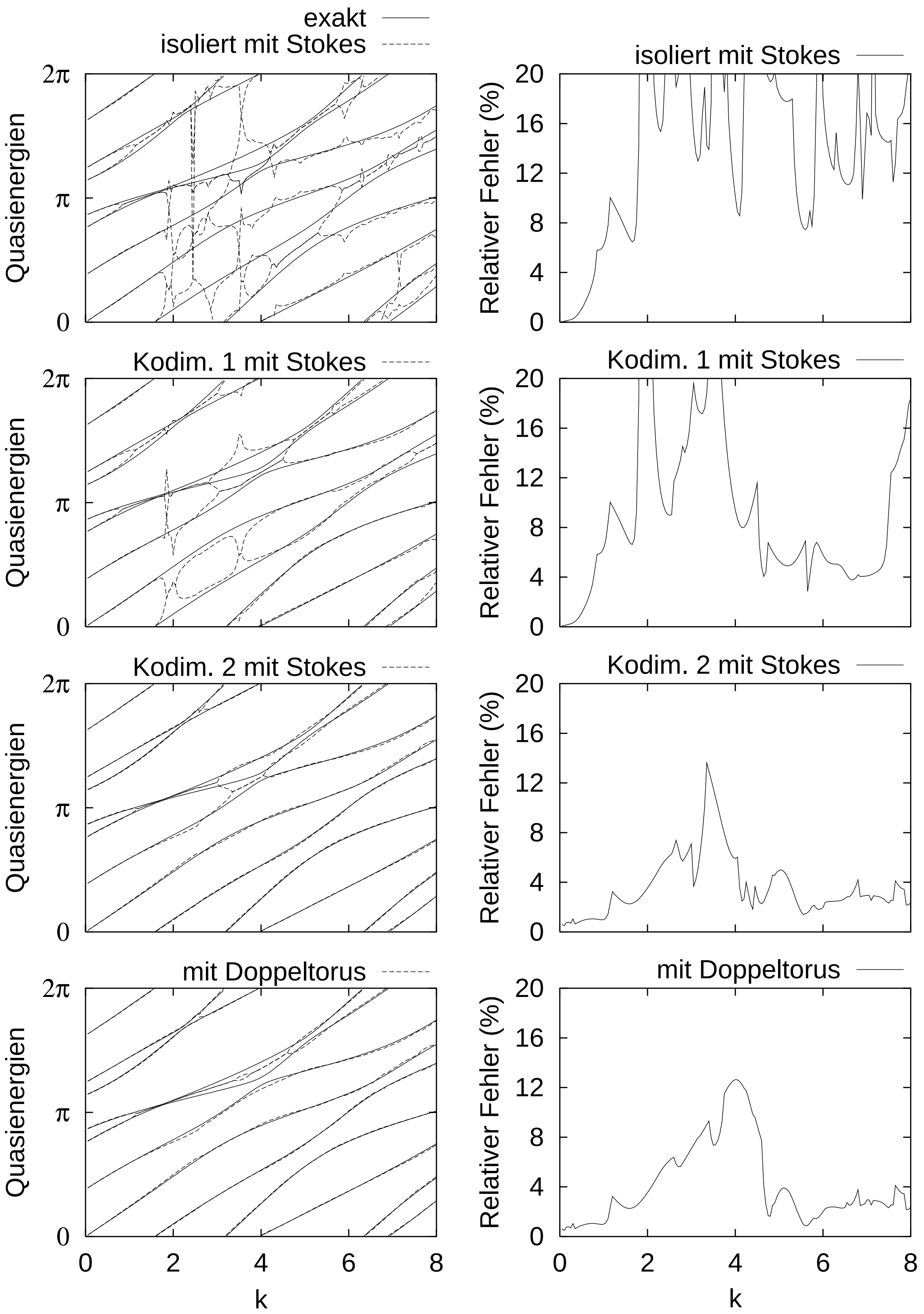


Abbildung 45: Vergleich der semiklassisch approximierten und exakten Spektren für $j = 3$ als Funktion von k. Links sind die Quasienergien aufgetragen, rechts ihr mittlerer relativer Fehler.

rameters in einer sogenannten vermiedenen Kreuzung sehr nahe kommen. Dann reicht schon ein kleiner semiklassischer Fehler, um die Unitaritätsbedingungen für die Spuren zu verletzen. Immerhin passiert dies nicht zwangsläufig, wie sich etwa an der extrem engen Annäherungen zweier Levels bei $k \approx 2.5$ zeigt. Im gemischten Phasenraum kommt einem in dieser Hinsicht auch nicht die für stark chaotische Systeme wohlbekannte Niveauabstoßung zur Hilfe. Die Tendenz zur Niveauhäufung wie in integrablen Systemen ist für kleine Werte von k noch zu verspüren.

Abgesehen von der Entartung vermag die beste vorgestellte Näherung das exakte Verhalten der Niveaus überaus gut zu reproduzieren. Klammert man die entarteten Levels aus, so übersteigt der Fehler der restlichen nicht sechs Prozent. In weiten Bereichen liegt er unter vier Prozent.

5.5 Spuren und Spektren für halbzahliges j

Für halbzahliges $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ muß man beachten, daß sich eingeschobene Drehungen um einen Winkel von 2π in einem Vorzeichenwechsel des Floquetoperators niederschlagen. Darauf sind wir in den Abschnitten 4.1.3 und 5.4.1 eingegangen. Anders gesagt ist der Windungszahl des Drehimpulsvektors um die jeweilige Drehachse Beachtung zu schenken. Dies überträgt sich auch auf die Beiträge periodischer Bahnen. So bringt die Drehung um 2π einen Wirkungszuwachs von ebenfalls 2π [Gleichung (5.11)], verknüpft mit dem Durchschreiten zweier Kaustiken und dem Anwachsen des Morse- und Maslovindex um 2 [m' aus Gleichung (5.16) in Verbindung mit Gleichung (5.18)]. In der Kombination

$$\left(j + \frac{1}{2}\right) S - \frac{\pi}{2}\nu \,, \tag{5.37}$$

die die Phase semiklassischer Beiträge bestimmt, heben sich diese beiden Zuwächse für ganzzahliges j gerade weg. Für halbzahliges j jedoch ändert sich die Phase um π, der Beitrag der Bahn wechselt also sein Vorzeichen. Dies ist bei der Verwendung der Formeln aus den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.6, nach denen sich die Wirkung und der Maslovindex zusammensetzt, zu berücksichtigen. Insbesondere muß man in den Gleichungen (3.11) und (4.42) den richtigen Funktionszweig der in der Wirkung auftretenden Arkuskosinus- und (komplexen) Logarithmusfunktionen festlegen.

Im folgenden werden wir die Spektren und die zu ihrer Bestimmung benötigten Spuren für $j = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$ vorstellen. Dabei stellt sich unter anderem heraus, daß man nur für $j = \frac{1}{2}$ auf die Verwendung der exakten Determinante verzichten kann. Unter ihrer Benutzung erhält man in allen Fällen gute Spektren.

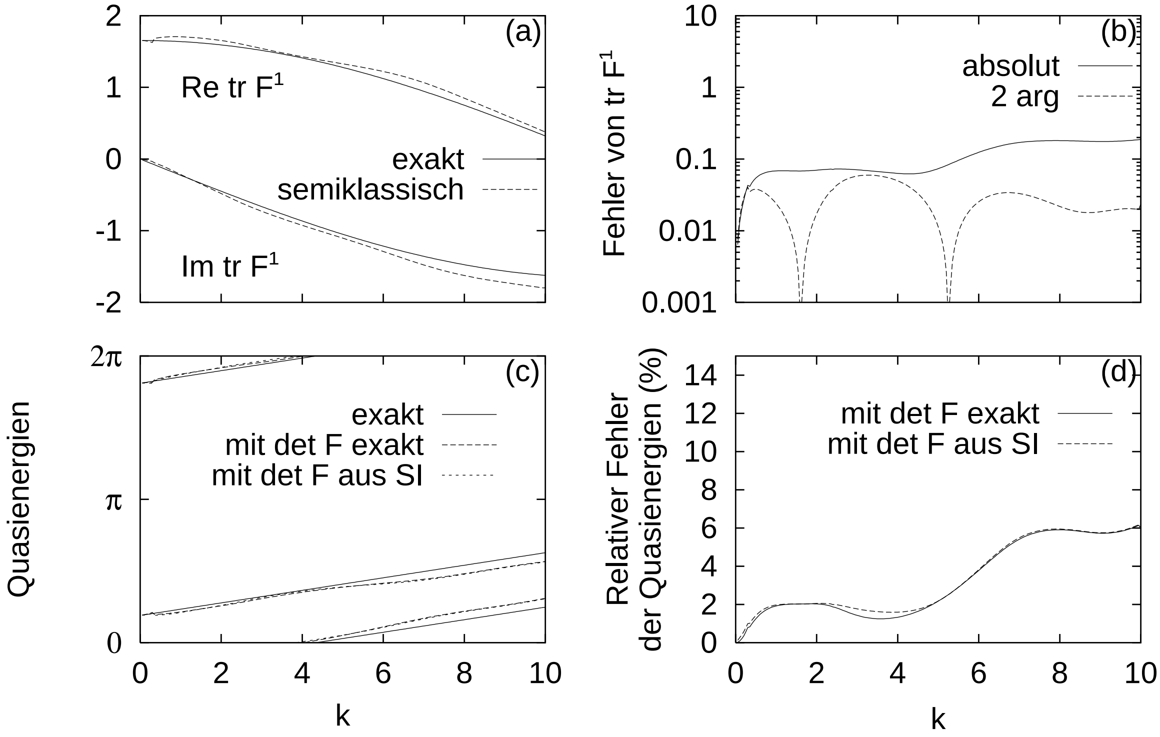


Abbildung 46: Der Weg zum Spektrum für $j = \frac{1}{2}$. (a) Die erste Spur in der besten semiklassischen Näherung (mit Kodimension zwei) im Vergleich zum exakten Resultat. (b) Absoluter Fehler der semiklassischen Spur sowie ihre doppelte Phasenabweichung $2|\arg\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{qm}} - \arg\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{sk}}|$, welche sich direkt auf den selbstinvers bestimmten Koeffizienten a_2 überträgt. (c) Die exakten und die semiklassisch gewonnenen Quasienergien im Vergleich. In der einen Näherung wird der Koeffizient $a_2 = \det F$ über die Selbstinversitätsbeziehung gewonnen (SI), in der anderen zu seiner Bestimmung die semiklassisch exakt reproduzierbare Determinante hinzugezogen. (d) Der relative Fehler der Niveaus beträgt mit beiden Entschlüsselungsmethoden nur wenige Prozent.

5.5.1 Die Spuren und Spektren für $j = \frac{1}{2}$

Die wesentlichen Größen dieses Abschnitts sind in Abbildung 46 zusammengestellt. Die zur Bestimmung der beiden Quasienergien benötigte erste Spur ist dort [Abb. 46(a)] in der besten Näherung, nämlich der mit Kodimension zwei, gegen k aufgetragen. Ihr absoluter Fehler $|\,\mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{qm}} - \mathrm{tr}\, F^1_{\mathrm{sk}}|$ liegt bei ungefähr 0.1 [Abb. 46(b)]. Um das charakteristische Polynom zu konstruieren, kann man zwei Strategien verfolgen: Zum einen läßt sich der Koeffizient $a_2 = \det F$ aus der Selbstinversitätsbeziehung

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1^*} \tag{5.38}$$

mit $a_1 = \mathrm{tr}\, F$ bestimmen. Man kann zum anderen aber auch wieder die auf andere Weise semiklassisch exakt bestimmbare Determinante $\det F = a_2$ heranziehen. Die Phase von a_2 unterscheidet sich mit diesen beiden Strategien um $2|\arg\mathrm{tr}\, F_{\mathrm{qm}} - \arg\mathrm{tr}\, F_{\mathrm{sk}}|$ und ist klein, wie sich ebenfalls in Abbildung 46(b) zeigt. Die mittels dieser beiden Vorgehensweisen erhaltenen Quasienergien in Abbildung 46(c) weichen daher nur wenig voneinander ab; ihr relativer Fehler in Abbildung 46(d) bewegt sich zwischen zwei und sechs Prozent.

5.5.2 Die Spuren und Spektren für $j = \frac{3}{2}$

Die ersten beiden Spuren und ihr absoluter Fehler sind für $j = \frac{3}{2}$ in den Abbildungen 47(a)–(c) dargestellt. Zur Entschlüsselung der Quasienergien kann man wie bei $j = \frac{1}{2}$ den Koeffizienten a_4 entweder selbstinvers aus

$$a_4 = \frac{a_2}{a_2^*} \tag{5.39}$$

mit

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} F)^2 - \operatorname{tr} F^2\right] \tag{5.40}$$

bestimmen oder die exakte Determinante $a_4 = \det F$ benutzen. Mit der erstgenannten Vorgehensweise sind keine guten Ergebnisse zu erzielen: Wie in Abbildung 47(d) deutlich wird, erhält man für manche Werte von k völlig unsinnige Phasen von a_4. Dies liegt in der Verknüpfung zweier Ursachen begründet: Zum einen läßt sich die zweite Spur für den aktuellen kleinen Wert von j nicht sehr genau approximieren; zum anderen ist an den genannten Werten von k der Koeffizient a_2 dem Betrag nach verhältnismäßig klein und damit in der Phase gegen Näherungsfehler besonders empfindlich. Dabei spielt eine Rolle, daß — anders als bei $j = \frac{1}{2}$ — der mittlere Koeffizient hier und für größere Werte von j eine Kombination mehrerer Spuren ist und insbesondere Summen und Differenzen auftauchen. Den Koeffizienten a_4 benutzt man in beiden Strategien weiter, um auch a_3 selbstinvers zu bestimmen. In den Quasienergien [Abb. 47(e)] macht sich der Phasenfehler des Koeffizienten a_4 in der ersten Strategie durch einen Zuordnungswechsel der semiklassischen zu den quantenmechanischen Niveaus bemerkbar, in dessen Umgebung der relative Fehler [Abb. 47(e)] der Quasienergien sehr groß wird. Mit der exakten Determinante ist das Ergebnis erneut ausgesprochen gut (die Niveaus lassen sich kaum von den exakten unterscheiden) und übersteigt nirgends drei Prozent.

5.5.3 Die Spuren und Spektren für $j = \frac{5}{2}$

In den Abbildung 48(a)–(c) finden sich die ersten drei Spuren, die man zur Bestimmung der Quasienergien für $j = \frac{5}{2}$ benötigt. Für $j = \frac{5}{2}$ führt die semiklassische Bestimmung des Koeffizienten a_6 aus der Selbstinversitätsbeziehung wie bei $j = \frac{3}{2}$ nicht überall zu einer befriedigenden Näherung: Im Intervall $0 \leq k \leq 8$ trifft man einmal auf einen Zuordnungswechsel der Niveaus, verbunden mit einem stark erhöhten relativen Fehler der Quasienergien. Auf die Darstellung dieses Ergebnisses wird hier verzichtet. Wir

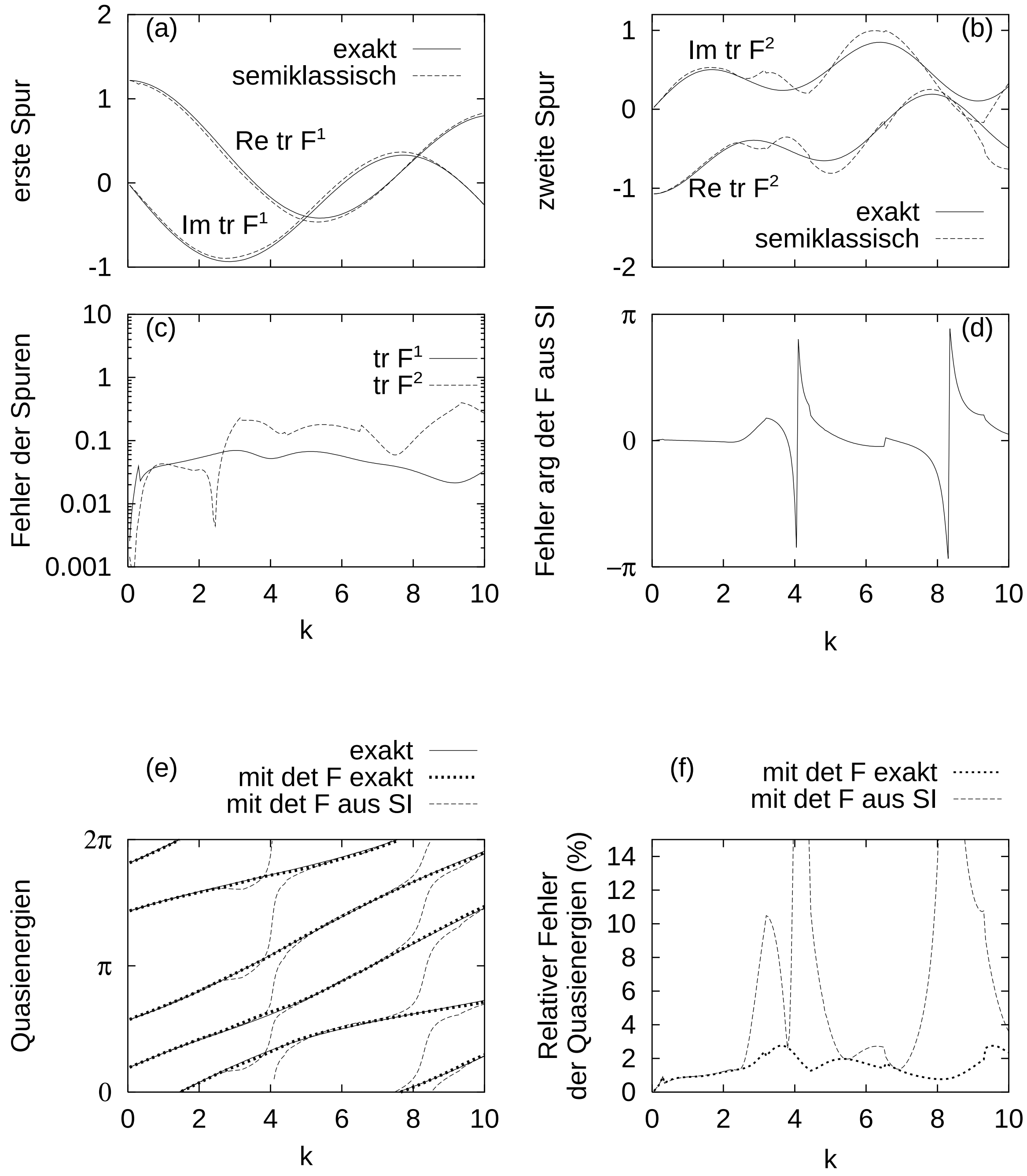


Abbildung 47: Der Weg zum Spektrum für $j = \frac{3}{2}$. (a), (b) Die ersten beiden Spuren in der besten semiklassischen Näherung (mit Kodimension zwei) im Vergleich zum exakten Resultat. (c) Absoluter Fehler der semiklassischen Spuren. (d) Phasenabweichung des selbstinvers bestimmten Koeffizienten $a_4 = \det F$ aus der Selbstinversitätsrelation (5.39). (e) Die exakten und die semiklassisch gewonnenen Quasienergien im Vergleich. In der einen Näherung wird der Koeffizient $a_4 = \det F$ über die Selbstinversitätsbeziehung gewonnen (SI), in der anderen zu seiner Bestimmung die semiklassisch exakt reproduzierbare Determinante hinzugezogen. Nur mit der letztgenannten Vorgehensweise erhält man überall verläßliche Quasienergien, deren Fehler in (f) dargestellt ist.

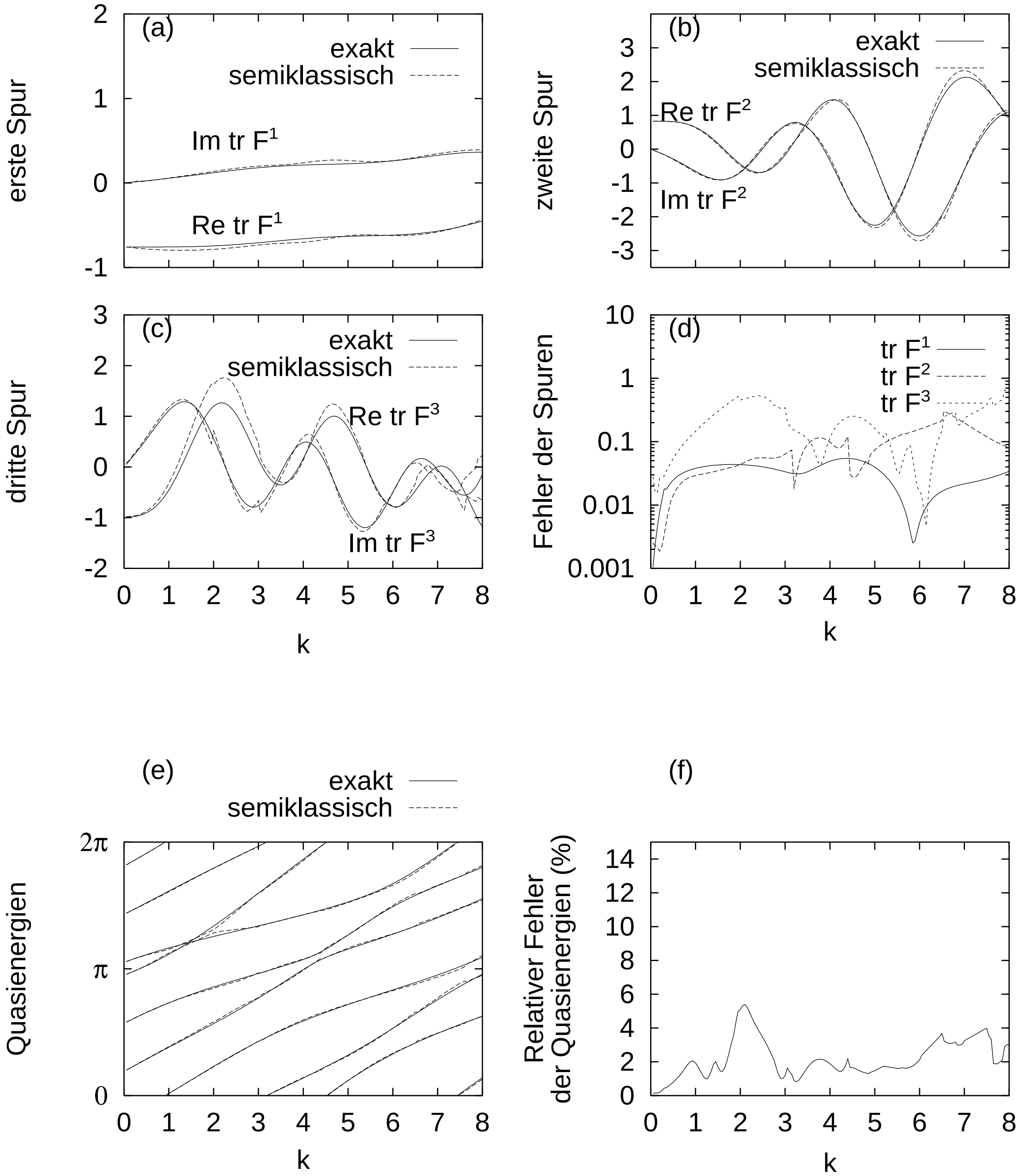


Abbildung 48: Der Weg zum Spektrum für $j = \frac{5}{2}$. (a)–(c) Die ersten drei Spuren in der besten semiklassischen Näherung (mit Kodimension zwei und Doppeltorusbeitrag) im Vergleich zum exakten Resultat. (d) Absoluter Fehler der semiklassischen Spuren. (e) Die exakten und semiklassisch gewonnenen Quasienergien im Vergleich. Dabei wird die exakte Determinante $\det F = a_6$ verwendet. (f) Der relative Fehler der Quasienergien beträgt weniger als sechs Prozent.

bestimmen besser die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 aus den ersten drei Spuren, benutzen für a_6 die exakte Determinante und erhalten a_4 und a_5 aus der Selbstinversitätsbeziehung. So erreicht man wieder eine schöne Übereinstimmung zwischen den exakten und den genäherten Niveaus [Abb. 48(e)] mit einem Fehler von weniger als sechs Prozent, ja vielerorts sogar weniger als drei Prozent [Abb. 48(f)].

6 Diskussion der Resultate und offene Fragen

In dieser Arbeit hat sich gezeigt, daß man auch für Systeme mit einem gemischten Phasenraum zuverlässige Spektren aus periodischen Bahnen erhalten kann. Selbst für moderate Werte der Quantenzahl j, die sich für den periodisch getriebenen Kreisel als Inverse der Planckschen Konstanten ausnimmt, gelingt die Bestimmung der Lage der Quasienergieniveaus bis auf einen kleinen Prozentsatz ihres mittleren Abstands. Dieser schöne Erfolg beruht auf dem Zusammenwirken einer Vielzahl verschiedener Erkenntnisse, wobei jedes Gebiet zu weiteren Anstrengungen auffordert, im besseren Sinne sogar einlädt.

Die semiklassische Näherung an sich beruht auf der Auswertung des Phasenraumintegrals (4.39) für die Spur des Propagators mittels der Methode des stärksten Abklingens. Die periodischen Bahnen bilden das Gerüst jener Gebiete, aus denen das Integral auf einer geeignet deformierten Integrationsmannigfaltigkeit seine größten Beiträge erhält. Der Startausdruck der Semiklassik leidet jedoch unter ein paar Defekten (die zum Glück durch das weitere Voranschreiten zum größten Teil gegenstandslos werden). So ist der Integrand nicht invariant unter kanonischen Transformationen. Selbst das Vertauschen von Ort und Impuls ($q \to P, p \to -Q$) führt auf einen veränderten Ausdruck. Mit kanonischen Transformationen verschieben sich auch die Kaustiken und damit die Gebiete, in denen der Integrand eine schlechte Näherung beschreibt. Wünschenswert wäre ein Ausdruck, der solche pathologischen Gebiete umgeht. Zum Teil mag dies schon automatisch mit der Deformation der Integrationskontur geschehen. Es gibt aber auch vielversprechende Ansätze wie die Wignerdarstellung des Propagators, in denen Ort und Impuls gleichberechtigt nebeneinanderstehen [80,93]. Oder sollte man zum Pfadintegralausdruck zurückgehen?

Die vier wesentlichen Eigenschaften der periodischen Bahnen (Länge, Wirkung, Stabilität, Maslovindex) sind invariant unter kanonischen Transformationen. Offen bleibt, ob dies auch für die Topologie der verschobenen Integrationsmannigfaltigkeit gilt. Sind die relevanten Geisterbahnen zum Beispiel in jedem kanonischen Koordinatensystem gleich? Eine negative Antwort auf diese Fragestellung wäre überraschend, doch es bleibt noch verborgen, in welchen Eigenschaften die Bejahung schlummert. Insgesamt ist auf der Stufe des Phasenraumintegrals (4.39) die Suche nach dem günstigsten Anfangsausdruck nicht abgeschlossen. Hätte man einen solchen Ausdruck, so wäre es sicher interessant, das Integral direkt auszuwerten.

Wir haben uns geeigneter Normalformen bedient und gleichförmige Näherungen konstruiert, um kanonisch invariante Beiträge aus den Gebieten um die periodischen Bahnen herum zu erhalten. Dabei halfen die klassische Störungstheorie und Ansätze aus der Katastrophentheorie, Normalformen herzuleiten und die kollektiven Beiträge eng benachbarter Bahnen zu finden. Cluster aus periodischen Bahnen wurden anhand jener Bifurkationen gebildet, in deren Nähe sich das System im Parameterraum gerade befindet. Die Bahnen eines Clusters tragen gemeinsam zur Spur des Propagators bei.

Bei den Bifurkationen haben wir lokale Bifurkationen von globalen unterschieden, wobei letztere mit Stokesübergängen verknüpft sind. Die Bifurkationen haben wir weiter in ihrer Komplexität nach ihrer Kodimension klassifiziert. Die Bifurkationen der Kodimension eins treten bei einer einparametrigen Studie eines Systems auf und sind in diesem Sinne generisch. Mit Bifurkationen der Kodimension zwei können auch die wichtigsten *Sequenzen* generischer Bifurkationen beschrieben werden. Für höhere Potenzen der Spur ist mit dem exponentiellen Anwachsen der Zahl periodischer Bahnen eine andauernde Erhöhung der benötigten Kodimension denkbar. Die Normalformen sollten sich mittels der Mitnahme höherer Resonanzen in der Störungsreihe der Hamiltonfunktion ergeben. Der Schritt von der Normalform der Hamiltonfunktion zu der Erzeugenden im Vorfeld solcher Untersuchungen bedarf sicher noch einiger technischer Vereinfachungen.

Ein eng verwandtes Thema sind *Kaskaden* von Bifurkationen. Dies sind Abfolgen, die sich erst durch Iteration von Normalformen beschreiben lassen. Als Beispiel mag die Abbildung gelten, die hinter der Normalform (3.113) für Tangentenbifurkationen steht. Sie läßt sich in eine Form bringen, die man auch unter dem Namen „quadratische Abbildung“ kennt und gerne benutzt wird, um Kaskaden von Periodenverdopplungen im Anschluß an eine Tangentenbifurkation zu beschreiben [77, Kapitel 3.8.2]. Im Rahmen dieser Arbeit konnten solche Kaskaden in allen Fällen durch ein Umordnen der Cluster bei einem Wert des Kontrollparameters zwischen den Bifurkationen behandelt werden. Unter weiteren Iterationen der Abbildung ist aber zu erwarten, daß dies nicht mehr ausreicht.

Direkt knüpft sich die Frage nach dem semiklassischen Fehler an. Selbst eine Abschätzung fällt schwer. Es ist wenig über die Korrekturterme in höheren Ordnungen der Planckschen Konstanten bekannt. Sie sind in jedem Fall nicht mehr kanonisch invariant und führen in die Richtung einer vollständigen asymptotischen Entwicklung der Propagatorspur. Letztendlich sollte es gelingen, sogar zu einem formal exakten Ergebnis zu gelangen.

Schon auf der ersten Stufe dieser Entwicklung, auf die wir uns hier beschränkt haben, bleibt offen, bis zu welchen Zeiten man sich auf die Semiklassik verlassen kann. Sinnvoll scheint eine Zeit in der Größenordnung der Heisenbergzeit, in der Größenordnung des Inversen der Planckschen Konstanten also. Beim Kreisel ist sie mit $t_{\mathrm{h}} = \frac{1}{N} = \frac{1}{2j+1}$ mit der Darstellungsdimension verknüpft.

Statistische Eigenschaften des Energiespektrums sind in dieser Arbeit gänzlich ausgeklammert worden. Viele Eigenschaften chaotischer Systeme lassen sich mit der Zufallsmatrixtheorie beschreiben [21,52–54]. Ansätze, den Zusammenhang auch streng zu begründen, sind in jüngster Zeit auf immer größeres Interesse gestoßen [94–101]. So steht in diesem Zusammenhang noch eine Klärung des semiklassischen Ursprungs des Verhaltens mancher Größen nach der Heisenbergzeit aus. Ein Beispiel ist die Strukturfunktion $C_n \equiv \langle |\operatorname{tr} F^n|^2 \rangle$. Das Mittel ist entweder über $\hbar$ (also j) oder ein Gebiet im Parameterraum zu nehmen. Für einen ausgeprägt chaotischen Kreisel ohne Zeitumkehrinvarianz wächst $C_n = n$ bis $n = N$ linear an und bleibt dann konstant, $C_n = N$ für $n \geq N$. Dies steht im Einklang zur Zufallsmatrixtheorie [55]. Das lineare Anwachsen bis zur Heisenbergzeit läßt sich semiklassisch aus der Hannay–Ozorio-de-Almeida–Summationsregel verstehen [30,102]. Es wird vermutet, daß für größere Zeiten Korrelationen zwischen periodischen Bahnen eine Rolle spielen. Während man zur Zeit aktiv nach klassischen Korrelationen Ausschau hält, bietet sich auch ein zweites Erklärungsmuster an: Es mag — selbst für vollständig chaotische Systeme — sein, daß nach der Heisenbergzeit die skalierte Wirkungsdifferenz benachbarter Bahnen nicht mehr groß genug ist, um mit der üblichen Näherung der stationären Phase auszukommen. Möglicherweise ist dann die Erzeugende auf der Skala $\hbar = \frac{1}{N}$ eine nur schwach veränderliche Funktion, und das Phasenraumintegral kann durch ein ergodisches Mitteln durchgeführt werden. Die durch die Unzahl der periodischen Bahnen herrührenden Fluktuationen bewegen sich nach dieser Hypothese für große Zeiten unterhalb der Skala $\frac{1}{N}$ und spielen keine Rolle mehr. Dadurch lassen sich Skalierungseigenschaften folgern, die überprüft werden sollten.

Die Selbstinversitätsbeziehung und die Kenntnis der exakten Determinante erlauben es, sich auf die Dynamik bis zur Hälfte der Heisenbergzeit zu beschränken. Um sich von der exakten Determinante zu lösen, bedarf es sicher noch einiger Anstrengungen. Es bleibt festzuhalten, daß die Determinante mit dem Kunstgriff der Faktorisierung auch semiklassisch exakt bestimmbar ist. Sowohl die reine Drehung als auch die reine Torsion lassen sich nämlich mittels periodischer Bahnen oder EBK–Quantisierung fehlerlos behandeln.

Bei der Frage nach dem zeitlichen Gültigkeitsbereich der Semiklassik wie auch bei den Kaskaden und der Abschätzung der benötigten Kodimension mögen Techniken aus der Renormierungstheorie hilfreich sein. In allen drei Fällen würde man sich auf das Verhalten der mit N skalierten Wirkungsdifferenz im gemeinsamen Grenzfall $N = t \to \infty$ interessieren. Die Verknüpfung der beiden Grenzübergänge ist durch die Heisenbergzeit gegeben.

Fraglich bleibt, ob sich in einer konkreten Anwendung das Auffinden und Zuordnen einer Unzahl periodischer Bahnen soweit automatisieren läßt, daß der Aufwand halbwegs in Grenzen gehalten wird. Es gibt andererseits semiklassische Techniken, die auf periodische Bahnen verzichten und mit deutlich weniger klassischer Information auskommen [24,25,103,104]. Wie läßt sich der Informationsüberschuß verstehen, und wie kann man seiner Herr werden? Auch wenn kein Ansatz erkennbar ist, scheint eine Klärung allemal wünschenswert.

Die hier betrachtete Kreiselversion zeichnet sich durch die Abwesenheit aller geometrischer Symmetrien aus und ist auch nicht zeitumkehrinvariant, wenn man mal vom integrablen Fall absieht. Sehr leicht lassen sich jedoch die Parameter so wählen, daß Symmetrien auftreten. Dadurch treten weitere Typen von Bifurkationen auf, die erst in der Teilklasse symmetrischer Systeme generisch sind [71–75]. Bei Zeitumkehrinvarianz kommt genau ein weiterer Bifurkationstyp hinzu. Geht man schließlich nicht von der reinen Drehung, sondern von der reinen Torsion aus, so müßten auch die gleichförmigen Näherungen für gebrochene Tori herangezogen werden. Einen solchen Beitrag haben wir bei $\mathrm{tr}\, F^3$ benutzt; die Anwendung ergab sich aber nur mehr oder weniger zufällig. Kontinuierlichen Symmetrien wie in [105,106] sind erst bei Systemen mit mehr Freiheitsgraden Beachtung zu schenken.

Schließlich sollte das vorgestellte Programm auch für autonome Systeme mit zwei Freiheitsgraden durchführbar sein. Die semiklassischen Beiträge lassen sich in einfacher Weise übersetzen [26,27,37]. Die Selbstinversitätsbeziehung findet ihren Gleichklang in einer Funktionalrelation für die dynamische Zetafunktion [89–91]. Erst in der konkreten Anwendung zeigen sich jedoch meist tieferliegende Probleme. Dies ist eine der offensichtlichsten Lehren dieser Arbeit. Mit der vorgefundenen Ausgangslage jedenfalls wäre auf der Suche nach dem Spektrum kein Blumentopf zu gewinnen gewesen.

Literatur

[1] A. Einstein, Verh. Dt. Phys. Ges. **19**, 82 (1917).
[2] L. Brillouin, J. Phys. Radium **7**, 353 (1926).
[3] J. B. Keller, Ann. Phys. (N. Y.) **4**, 180 (1958).
[4] V. P. Maslov, *Theorie des Perturbations et Methodes Asmyptotiques* (Dunod, Paris, 1972).
[5] J. H. Van Vleck, Proc. Natn. Acad. Sci. **14**, 178 (1928).
[6] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1947).
[7] M. V. Berry und K. E. Mount, Rep. Prog. Phys. **35**, 315 (1972).
[8] R. P. Feynman und A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Mc Graw–Hill, New York, 1965).
[9] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).
[10] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
[11] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
[12] M. Tabor, Physica D **6**, 195 (1983).
[13] G. Junker und H. Leschke, Physica D **56**, 135 (1992).
[14] R. Balian und C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **69**, 76 (1972).
[15] M. V. Berry und M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **349**, 101 (1976).
[16] M. V. Berry und M. Tabor, J. Phys. A **10**, 371 (1977).
[17] P. J. Richens, J. Phys. A **15**, 2101 (1982).
[18] L. Markus und K. R. Meyer, Memoirs of the AMS 144 (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1974).
[19] F. Haake, M. Kuś, J. Mostowski und R. Scharf, in *Coherence, Cooperation, and Fluctuations*, herausgegeben von F. Haake, L. M. Narducci und D. F. Walls (Cambridge University Press, Cambridge, 1986), S. 220–230.
[20] F. Haake, M. Kuś und R. Scharf, Z. Phys. B **65**, 381 (1987).
[21] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 1991).
[22] M. Kuś, F. Haake und B. Eckhardt, Z. Phys. B **92**, 221 (1993).
[23] M. Kuś, F. Haake und D. Delande, Phys. Rev. Lett. **71**, 2167 (1993).
[24] P. Gerwinski, F. Haake, M. Kuś, H. Wiedemann und K. Życzkowski, Phys. Rev. Lett. **74**, 1562 (1995).
[25] P. A. Braun, P. Gerwinski, F. Haake und H. Schomerus, Z. Phys. B **100**, 115 (1996).
[26] H. Schomerus und M. Sieber, J. Phys. A **30**, 4537 (1997).
[27] M. Sieber und H. Schomerus, chao-dyn/9708013 (1997).
[28] H. Schomerus, Europhys. Lett. **38**, 423 (1997).
[29] H. Schomerus und F. Haake, Phys. Rev. Lett. **79**, 1022 (1997).

[30] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).

[31] K. R. Meyer und G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Band 90 der Reihe *Applied Mathematical Sciences* (Springer, New York, 1992).

[32] A. J. Lichtenberg und M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Band 38 der Reihe *Applied Mathematical Sciences* (Springer, New York, 1992).

[33] K. R. Meyer, Trans. Am. Math. Soc. **149**, 95 (1970).

[34] A. D. Bruno, Math. USSR Sbornik **12**, 271 (1970).

[35] A. D. Bruno, preprint Nr. 18, Inst. Prikl. Mat. Akad. Nauk SSSR, Moskau (in Russisch) (1972).

[36] A. M. Ozorio de Almeida und J. H. Hannay, J. Phys. A **20**, 5873 (1987).

[37] M. Sieber, J. Phys. A **29**, 4715 (1996).

[38] D. A. Sadovskií, J. A. Shaw und J. B. Delos, Phys. Rev. Lett. **75**, 2120 (1995).

[39] D. A. Sadovskií und J. B. Delos, Phys. Rev. E **54**, 2033 (1996).

[40] E. Bogomolny, O. Bohigas und P. Leboeuf, Phys. Rev. Lett. **68**, 2726 (1992).

[41] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1965).

[42] M. V. Fedoryuk, in *Analysis I*, Band 13 der Reihe *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, herausgegeben von R. V. Gamkrelidze (Springer, Berlin Heidelberg, 1989).

[43] R. Balian und C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **85**, 514 (1974).

[44] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **422**, 7 (1989).

[45] P. A. Boasman und J. P. Keating, Proc. R. Soc. Lond. A **449**, 629 (1995).

[46] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis* (Benjamin, Reading, Mass., 1975).

[47] J. J. Duistermaat, Commun. Pure Appl. Math. **27**, 207 (1974).

[48] J. N. L. Connor, Molec. Phys. **31**, 33 (1976).

[49] M. V. Berry, Adv. Phys. **25**, 1 (1976).

[50] T. Poston und I. N. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications* (Pitman, London, 1978).

[51] V. I. Arnol'd, in *Dynamical Systems V*, Band 5 der Reihe *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, herausgegeben von V. I. Arnol'd (Springer, Berlin Heidelberg, 1994).

[52] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).

[53] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York, 1991).

[54] O. Bohigas, M. J. Giannoni und C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).

[55] F. Haake, M. Kuś, H.-J. Sommers, H. Schomerus und K. Życzkowski, J. Phys. A **29**, 3641 (1996).

[56] L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **54**, 407 (1982).

[57] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Band 60 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* (Springer, New York, 1984).

[58] M. V. Berry und C. Upstill, in *Progress in Optics*, herausgegeben von E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1980), Band VIII, S. 257–346.

[59] D. Ruelle, Ann. Inst. H. Poincaré **42**, 109 (1985).

[60] U. Dressler und W. Lautenborn, Phys. Rev. A **41**, 6702 (1990).

[61] B. Eckhardt und D. Wintgen, J. Phys. A **24**, 4335 (1991).

[62] J. M. Robbins und R. G. Littlejohn, Phys. Rev. Lett. **58**, 1388 (1987).

[63] J. M. Robbins, Nonlinearity **4**, 343 (1991).

[64] J. Robbins, Chaos **2**, 145 (1992).

[65] J. P. Eckmann und R. Sénéor, Arch. Rat. Mech. Anal. **61**, 153 (1976).

[66] I. C. Percival, Adv. Chem. Phys. **36**, 1 (1977).

[67] V. P. Maslov und M. V. Fedoryuk, *Semiclassical Approximations in Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1981).

[68] S. C. Creagh, J. M. Robbins und R. G. Littlejohn, Phys. Rev. A **42**, 1907 (1990).

[69] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).

[70] J. H. Hannay, J. Phys. A **18**, 221 (1985).

[71] R. J. Rimmer, Memoirs of the AMS 272 (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1983).

[72] M. Golubitsky und I. Stewart, Physica D **24**, 391 (1987).

[73] M. A. M. de Aguiar, C. P. Malta, M. Baranger und K. T. R. Davies, Ann. Phys. (N. Y.) **180**, 167 (1987).

[74] M. A. M. de Aguiar und C. P. Malta, Physica D **30**, 413 (1988).

[75] A. M. Ozorio de Almeida und M. A. M. de Aguiar, Physica D **41**, 391 (1990).

[76] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems* (American Mathematical Society, New York, 1927).

[77] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos* (Springer, New York, 1992).

[78] J. Main und G. Wunner, Phys. Rev. A **55**, 1743 (1997).

[79] A. Mostowski und M. Stark, *Introduction to Higher Algebra* (Pergamon Press, Oxford, 1964).

[80] M. V. Berry und N. L. Balasz, J. Phys. A **12**, 625 (1979).

[81] E. J. Heller, S. Tomsovic und M. A. Sepúlveda, Chaos **2**, 105 (1992).

[82] I. S. Gradshteyn und I. M. Rhyzik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 1994).

[83] F. J. Wright, J. Phys. A **13**, 2913 (1980).

[84] T. Pearcey, Philos. Mag. **37**, 311 (1946).

[85] S. Tomsovic, M. Grinberg und D. Ullmo, Phys. Rev. Lett. **75**, 4346 (1995).

[86] D. Ullmo, M. Grinberg und S. Tomsovic, Phys. Rev. E **54**, 136 (1996).

[87] D. Wintgen, Phys. Rev. Lett. **58**, 1589 (1987).

[88] U. Eichmann, K. Richter, D. Wintgen und W. Sandner, Phys. Rev. Lett. **61**, 2438 (1988).

[89] M. V. Berry und J. P. Keating, J. Phys. A **23**, 4839 (1990).
[90] J. P. Keating, Chaos **2**, 15 (1992).
[91] J. P. Keating, Proc. R. Soc. Lond. A **436**, 99 (1992).
[92] H.-J. Sommers, F. Haake und J. Weber, in Vorbereitung.
[93] M. V. Berry, Phil. Trans. R. Soc. **287**, 237 (1977).
[94] M. Wilkinson, J. Phys. A **21**, 1173 (1988).
[95] N. Argaman, F.-M. Dittes, E. Doron, J. P. Keating, A. Yu. Kitaev, M. Sieber und U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **71**, 4326 (1993).
[96] A. V. Andreev und B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **75**, 902 (1995).
[97] O. Agam, B. L. Altshuler und A. V. Andreev, Phys. Rev. Lett. **75**, 4389 (1995).
[98] A. V. Andreev, O. Agam, B. D. Simons und B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **76**, 3947 (1996).
[99] A. V. Andreev, B. D. Simons, O. Agam und B. L. Altshuler, cond-mat/9605204 (1996).
[100] E. Bogomolny und J. P. Keating, Phys. Rev. Lett. **77**, 1472 (1996).
[101] U. Smilansky, chao-dyn/9611002 (1996).
[102] J. H. Hannay und A. M. Ozorio de Almeida, J. Phys. A **17**, 3429 (1984).
[103] E. B. Bogomolny, Comments At. Mol. Phys. **25**, 67 (1990).
[104] E. B. Bogomolny, Nonlinearity **5**, 805 (1992).
[105] S. C. Creagh und R. G. Littlejohn, Phys. Rev. A **44**, 836 (1991).
[106] S. C. Creagh und R. G. Littlejohn, J. Phys. A **25**, 1643 (1992).

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name:	Henning Schomerus
geboren:	12. Februar 1969 in Marl
Eltern:	Hilko Schomerus und Gabriele Schomerus, geb. Gaupp
Geschwister:	ein Bruder, Riclef Schomerus
verheiratet mit:	Ikuyo Schomerus, geb. Soneda
Kinder:	ein Sohn namens Fabian und eine Tochter namens Lisa

Ausbildung

1975–1979	Johann–Adam–Förster–Grundschule in Hünfeld
1979–1980	Wigbertgymnasium in Hünfeld
1980–1988	Geschwister–Scholl–Gymnasium in Marl Abschluß: Abitur
1988–1993	Studium der Physik in Stuttgart
1990	Vordiplom im Studiengang Physik
1993	Hauptdiplomsprüfungen im Studiengang Physik Abschluß: Diplom–Physiker
1993–1994	einjähriger Forschungsaufenthalt, The Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN), Wako, Japan
seit 1994	wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Physik der Universität GH Essen

Danksagungen

Von verschiedenen Seiten habe ich während meiner Promotion Unterstützung erfahren. Folgenden Personen möchte ich meinen Dank aussprechen:

Herrn Prof. Dr. Fritz Haake danke ich für die Vergabe des Promotionsthemas, die hilfsbereite Betreuung und die stete Anteilnahme am Fortgang der Arbeit. Dank gilt ihm auch für den herzlichen Umgang und sein persönliches Engagement über die Arbeit hinaus.

Herr Prof. Dr. Robert Graham übernahm freundlicherweise den Mitbericht; Herr Prof. Dr. Hans A. Weidenmüller begutachtete die Arbeit extern; vielen Dank auch an Prof. Dr. Hans–Friedrich Döbele für den Vorsitz im Promotionsausschuß.

Frau Barbara Sacha gilt mein Dank, da sie sich im Sekretariat jederzeit hilfsbereit um eine Vielzahl organisatorischer Belange gekümmert hat. Rüdiger Oberhage hat die Rechner gehütet.

Fachlichen Rat habe ich von Dr. Martin Sieber, Prof. Jonathan Keating, Prof. Marek Kuś und Prof. Petr Braun erhalten.

Die Kollegen der Arbeitsgruppen Haake und Graham sorgten für eine freundschaftliche Atmosphäre während des gesamten Zeitraums in Essen. Insbesondere genannt seien Joachim Weber und Martin Fließer sowie Daniel Braun, Sven Gnutzmann, Peter Goetsch, Andreas Hamm, Christoph Uhlig und Christian Wiele. Joachim hat zudem die Arbeit gegengelesen.

Meinen Eltern danke ich für ihre Liebe und ihr Vertrauen, so auch in das Ausgestalten meines Lebenswegs. Meinen Schwiegereltern, Tomiji und Chikako Soneda, danke ich für die Anteilnahme aus großer Ferne, meinem Bruder Riclef und dem Rest der Verwandtschaft für jene aus der Nähe.

Die wertvollste Unterstützung erhielt ich von meiner Frau Ikuyo, durch ihre Zuneigung, ihr Engagement und ihre Fürsorge. Bei Dir und den Kindern, Fabian und Lisa, finde ich schnell zurück ins wirkliche Leben, Euch gehört mein Herz und meine Liebe $\heartsuit$